بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحیمِ

معرفی منطق جبری جامع

An Introduction to Universal Algebraic Logic

اسفندیار اسلامی
بخش ریاضی،دانشگاه شهید باهنر کرمان

۲۵و۲۶ آذر ماه ۱۳۹۳

فهرست مطالب

۱ منطق جبری

این ایده حل مسائل منطق ”که ابتدا آنها را به زبان جبر ترجمه کرده و سپس با روش های قدرتمند جبر به آنها پاسخ دهیم و نهایتا جواب را به زبان منطق برگردانیم” زمان لیبنیتز و پاسکال بر میگردد.

مقالات در حوزه تاریخ منطق اشاراتی دارند که این روش به طور موثری در قرن نوزدهم نه تنها در منطق های گزاره ای بلکه در منطق محمولات نیز بکار برده شده است (دمورگان، پیرس و دیگران این روش را برای منطق های محمولات بکار بردند). از آن زمان کاربردها افزایش یافت (هرچند به بعضی از این ها توجه نشد، به عنوان مثال قضیه تامیت Kripk–Lemmon برای منطق موجهات نسبت به مدل های کریپکه اولین بار توسط Jonsson و تارسکی در سال ۱۹۴۸ با بکارگیری منطق جبری ثابت شد.)

به طور خلاصه، فرآیند فوق به عنوان ” بکارگیری منطق جبری در منطق شناخته میشود”. این اصطلاح ممکن است کمی گمراه کننده باشد زیرا Algebraic Logic امروزه گرایشی در منطق است و این را نمیتوان انکار کرد.

$\mathcal{L}$ همتای جبری منطق $=$Algebraic counterpart of $\mathcal{L} = \mathbf{Alg}(\mathbf{L})$

همتای جبری مولفه $= \mathbf{Alg}_{\mathrm{m}}(\mathbf{L}) =$ Algebraic counterpart of semantical ingredient of $\mathcal{L}$ معنایی منطق $\mathcal{L}$

معرفی منطق جبری جامع
اسفندیار اسلامی

دومین سمینار سالانه انجمن منطق ایران

منطق جبری
انواع منطق ها
ارتباط منطق و جبر

قضایای هم ارزی:

به خواص اساسی منطق $\mathcal{L}$ خواص طبیعی و قابل بررسی از $\mathbf{Alg}(\mathbf{L})$ نسبت می دهیم به طوری که اگر بخواهیم در مورد خاصیتی از $\mathcal{L}$ تصمیم بگیریم که آیا آن خاصیت را دارد یا خیر ما می دانیم که چه سوالی در حوزه جبر در مورد $\mathbf{Alg}(\mathbf{L})$ بپرسیم.

همین ابزار برای وقتی که ما می خواهیم تغییراتی در یک منطق به وجود بیاوریم که خواص جدیدی داشته باشیم نیز مناسب است.

برای این منظور سعی داریم تعریفی جامعی از یک منطق داشته باشیم.

با رشد سریع کاربردهای متفاوت منطق در حوزه های متنوع مانند علوم کامپیوتر- زبان شناسی- هوش مصنوعی- حقوق-نسبیت و غیره، تعداد منطق های جدید مورد تحقیق رو به فزونی است.

در این موقعیت، Algebraic Logic ابزاری برای صرفه جویی و اتحاد راه های مختلف است. یکی از این ها این است که $\mathbf{Alg}(\mathbf{L})$ همیشه کلاسی از جبر هاست و بنابراین می توانیم مکانیزم واحدی به نام Universal Algebra (جبر جامع) را برای مطالعه تمام منطق های جدید بکار ببریم. به عبارت دیگر تمام منطق های مختلف را به نوعی به فرم نرمال در می آوریم.

بعلاوه برای خیلی از منطق های $\mathcal{L}$، $\mathbf{Alg}(\mathbf{L})$ در یک حوزه واحد از جبر جامع ظاهر می شوند و در نتیجه با روش های قدرتمند خاص می توان منطق L را مطالعه نمود.

"نقشه" نسبتا قابل فهمی برای مطالعه کلی جبر جامع وجود دارد. با بکارگیری فرآیند جبری کردن و قضایای هم ارزی میتوان این "نقشه" را (هر چند با درک کمتر) به منطق های ممکن برگشت داد.

۱.۱ دیدگاه کلی برای مطالعه منطق

تعریف کردن یک منطق تجربه ای شبیه به تعریف کردن یک زبان است.

۱- ابتدا syntax را معرفی می کنیم که این مجموعه تمام برنامه های آن زبان را مشخص می کند.

بایستی توجه داشت که برنامه ها مشخص می شوند ولی از این تعریف نمی توان استنباط کرد که چگونه کار می کنند.

۲-تشریح چگونگی کار آن ها و این که نتیجه چه خواهد بود وقتی که اجرا می شوند.

یعنی باید semantics را تعریف کنیم، به بیان دقیق تر جهان زبان مورد نظر را مشخص می کنیم.

وقتی یک زبان خارجی را می آموزیم، شرح داده می شود که چه رشته ای از علامات یک جمله در آن زبان هست و چه چیزی نیست. این شرح دستور زبان (syntax) آن زبان است. علاوه بر این ما باید شرح دهیم که جملات این زبان چه معنی می دهند. این منجر به تعریف معناشناسی زبان خواهد شد. اگر بخواهیم تعریف معناشناسی را فرموله کنیم و یا به بیان دقیقتر چارچوبی ارائه دهیم، ما به تعریف کلاس M از موقعیت های ممکن یا به عبارت دیگر " جهان های ممکن " می پردازیم که در آن جملات زبان ما تعبیر می شوند و آنگاه برای هر موقعیت m و هر جمله ρ، معنی ρ را در m تعریف می کنیم و با علامت $mng(\rho, m)$ نشان می دهیم.

در این جا می توانیم به فرق بین یک زبان و منطق اشاره کنیم ، ولی این کار را نمی کنیم. برای مقاصد کنونی فقط به این نکته کفایت می کنیم که این دو "خیلی خیلی شبیه" هستند.

دانشگاه شهید باهنر کرمان

معرفی منطق جبری جامع
اسفندیار اسلامی

دومین سمینار سالانه انجمن منطق ایران

منطق جبری
انواع منطق ها
ارتباط منطق و جبر

۲.۱ تعریف منطق به طور عام

یک منطق $\mathcal{L}$ یک پنج تایی به صورت

$$\mathcal{L} = \langle F_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}, mng_{\mathcal{L}}, \models_{\mathcal{L}} \rangle$$

است به طوری که

- $F_{\mathcal{L}}$ یک مجموعه است و مجموعه تمام فرمول های $\mathcal{L}$ نام دارد.

-$\vdash_{\mathcal{L}}$ یک رابطه دو تایی است بین مجموعه هایی از فرمول ها و یک فرمول. به عبارتی $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \mathbb{P}(F_{\mathcal{L}}) \times F_{\mathcal{L}}$ این رابطه "رابطه اثبات پذیری $\mathcal{L}$" نام دارد.

-$M_{\mathcal{L}}$ یک کلاس است و کلاس تمام مدل های (یا جهان های ممکن) $\mathcal{L}$ نام دارد.

-$mng_{\mathcal{L}}$ تابعی است با دامنه $F_{\mathcal{L}} \times M_{\mathcal{L}}$ و تابع معنی $\mathcal{L}$ نام دارد. با قراردادهای نظریه مجموعه ها

$$mng_{\mathcal{L}} : F_{\mathcal{L}} \times M_{\mathcal{L}} \longrightarrow V$$

که در آن V کلاس تمام مجموعه هاست.

-$\models_{\mathcal{L}}$ یک رابطه دوتایی است، $\models_{\mathcal{L}} \subseteq M_{\mathcal{L}} \times F_{\mathcal{L}}$، رابطه صدق (درستی) $\mathcal{L}$ نام دارد.

ارتباطی بین $\models_{\mathcal{L}}$ و $mng_{\mathcal{L}}$ به صورت زیر وجود دارد

$$(\forall \varphi, \psi \in F_{\mathcal{L}}), m \in M \ (mng_{\mathcal{L}}(\varphi, m) = mng_{\mathcal{L}}(\psi, m), m \models_{\mathcal{L}} \varphi) \Longrightarrow m \models_{\mathcal{L}} \psi$$

$mng_{\mathcal{L}}$ می گوید که معنی فرمول φ در جهان ممکن m چیست؟

و $\models_{\mathcal{L}}$ می گوید که آیا فرمول φ در جهان ممکن m درست است؟

در تمام حالات جالب، رابطه $\models_{\mathcal{L}}$ از $mng_{\mathcal{L}}$ قابل تعریف هست. یک تعریف ممکن نمونه ای به صورت زیر است

$$m \models_{\mathcal{L}} \varphi \ iff \ (\forall \psi \in F_{\mathcal{L}})(mng_{\mathcal{L}}(\psi, m)) \subseteq mng_{\mathcal{L}}(\varphi, m)$$

برای هر $\varphi \in F_{\mathcal{L}}$ و هر $m \in M_{\mathcal{L}}$.

البته به طور کلی تعریف پذیری $\models_{\mathcal{L}}$ از $mng_{\mathcal{L}}$ ضروری نیست.

- $< F_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} >$ قسمت گرامر منطق $\mathcal{L}$ است. (Syntactical part)

- $< M_{\mathcal{L}}, mng_{\mathcal{L}}, \models_{\mathcal{L}} >$ بخش معنی شناسی منطق $\mathcal{L}$ است. (Semantical part)

۳.۱ تعریف فرمول به طریق بازگشتی

ابتدا دو مجموعه یکی P (فرمول های اتمی) و دیگری $C_n(L)$ (رابط های منطقی) داده می شوند.

F کوچکترین مجموعه ای مانند H است به طوری که:

۱) $P \subseteq H$
۲) برای هر $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \in H$ و $f \in C_n(L)$ از مرتبه n داریم $f(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) \in H$.

-در منطق داده شده $\mathcal{L}$، گوییم $\varphi \in F_{\mathcal{L}}$ معتبر (Valid) است و می نویسیم $\models_{\mathcal{L}} \varphi$ اگر و فقط اگر برای هر $m \in M_{\mathcal{L}}$، $m \models_{\mathcal{L}} \varphi$.

-برای $\Gamma \subseteq F_{\mathcal{L}}$ و $\varphi \in F_{\mathcal{L}}$ گوییم φ نتیجه معنایی Γ است و می نوسیم $\Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi$ اگر و فقط اگر برای هر $m \in M_{\mathcal{L}}$ هرگاه $m \models_{\mathcal{L}} \psi$ برای هر $\psi \in \Gamma$، آنگاه $m \models_{\mathcal{L}} \varphi$.

یکی از مباحث مهم در منطق ها، مطالعه ارتباط بین نتیجه معنایی $\Gamma \models_{\mathcal{L}}$ و نتیجه گرامری $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. و اگر این دو معادل باشند گوییم "رابطه $\vdash_{\mathcal{L}}$ به طور قوی تام و سلامت (برای $\mathcal{L}$) است".

۴.۱ مثالی برای مفهوم منطق به شکل عام

فرض می کنیم

- $P = \{p_0, p_1, \dots\}$
- $C_n(S) = \{\neg, \wedge\}$

تعریف می کنیم:

$F_S =< P >$، کوچکترین مجموعه شامل P که تحت عملگرهای $\neg$ و $\wedge$ بسته است.

$M_S = \{m = \langle W, v\rangle \mid W \neq \emptyset, \mathfrak{v} : P \longrightarrow \mathbb{P}(W)\}$،

$$mng_S : F_s \times M_S \longrightarrow Sets$$

$p \in P$، $\quad mng^\circ_S(p, m) = \mathfrak{v}(p)$

$\varphi, \psi \in F_S$، $\quad mng^\circ_S(\neg\varphi, m) = W - mng^\circ_S(\varphi, m)$ ، $\quad mng^\circ_S(\varphi \wedge \psi, m) = mng^\circ_S(\varphi, m) \cap mng^\circ_S(\psi, m)$.

$$\varphi \in F_S\text{،} \quad for \ \ m =< W, \mathfrak{v} >\in M_S$$

$$m \models^\circ_S \varphi \ \ iff \ \ mng^\circ_S(\varphi, m) = W$$

$< F_S, M_S, mng^\circ_S, \models^\circ_S >$ بخش معنایی (Semantic part) منطق S است.

برای تعریف رابطه اثبات پذیری $\vdash^\circ_S$ میتوان به طریق زیر عمل کرد:

۱) زیرمجموعه ای از فرمول ها مانند $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}} \subseteq F_S$ را به عنوان اصول موضوعه انتخاب می کنیم.

۲) قاعده هایی را به عنوان قواعد استنتاج مطرح می کنیم.

۳) $\Gamma \vdash^\circ_S \varphi \ \ iff \ \ \varphi \in H \ for \ \ the \ smallest \ set \ \ H \subseteq F_S \ s.t \ \ \Gamma \cup \mathfrak{A}_{\mathfrak{S}} \subseteq H \ and$
$H \ is \ closed \ under \ inference \ rules$

حال ما منطق گزاره ای $\mathcal{L}^\circ_S = \langle F_S, \vdash^\circ_S, M_S, mng^\circ_S, \models^\circ_S \rangle$ را به طور کامل تعریف کردیم.

دانشگاه شهید باهنر کرمان

معرفی منطق جبری جامع

اسفندیار اسلامی

دومین سمینار سالانه انجمن منطق ایران

منطق جبری
انواع منطق ها
ارتباط منطق و جبر

در خیلی حالات به جای مفهوم عمومی (عام) منطق که شرح داده شد، ما فقط چهار مولفه یعنی $F_{\mathcal{L}}$ و $M_{\mathcal{L}}$ و $mng_{\mathcal{L}}$ و $\models_{\mathcal{L}}$ را در نظر می گیریم.
به بیان دیگر می توانیم تئوری را بدون از دست دادن کلیت و همراه نداشتن $\vdash$ ساده کنیم. یک تمایل طبیعی وجود دارد که سعی کنیم $\vdash_{\mathcal{L}}$ را به جای $\models_{\mathcal{L}}$ جایگزین کنیم هر چند در بعضی جاها (مانند قضایای تامیت) این روش ساده کردن خطرناک است، ولی با کمال تعجب در می یابیم که تمام قضایایی که برای $\models_{\mathcal{L}}$ ثابت می کنیم به $\vdash_{\mathcal{L}}$ انتقال داده می شوند در مواقعی که قضایا درباره رابطه $\models_{\mathcal{L}}$ و $\vdash_{\mathcal{L}}$ نباشند.

در نتیجه ما تصمیم می گیریم رابطه $\vdash_{\mathcal{L}}$ را فعلا حذف کنیم و فقط جائی آن را معرفی می کنیم که باید چیزی در مورد $\vdash_{\mathcal{L}}$ بگوییم که نمی تواند درباره $\models_{\mathcal{L}}$ گفته شود.

۵.۱ منطقی از نوع نحوی

فرض کنیم $\mathcal{L}_{syn} = \langle F, \vdash \rangle$ منطقی از نوع syntactical باشد. برای ساده کردن بحث، فرض می کنیم که $\mathcal{L}_{syn}$ یک رابط منطقی منتج$\longleftrightarrow$ را همانطور که منطق های کلاسیک دارند شامل باشد. البته خواص معمولی این رابط را قبول داریم.

فرض کنیم می خواهیم"منطق نحوی" $\mathcal{L}_{syn}$ را مطالعه کنیم، لذا کلاسی از شبه مدل ها $M_{\vdash}$ و یک $mng_{\vdash}$ به این منطق نسبت می دهیم.

$$M_{\vdash} := \{T \subseteq F : T \; is \; closed \; under \; \vdash\}.$$

برای هر شبه مدل $T \in M_{\vdash}$ و هر فرمول $\varphi \in F$،

$$mng_{\vdash}(\varphi, T) := \{\psi \in F : T \vdash (\varphi \longleftrightarrow \psi)\}.$$

به علاوه درستی در شبه مدل $T \in M$ به صورت زیر تعریف می شود

$$T \models_{\vdash} \varphi \longleftrightarrow \varphi \in T$$

حال اگر بخواهیم "منطق نحوی" را بررسی کنیم،قضایا را به منطق

$$\mathcal{L}_{\vdash} =^{def} \langle F, M_{\vdash}, mng_{\vdash}, \models_{\vdash} \rangle$$

بکار می بریم. شرط $(mng_{\mathcal{L}}(\varphi, m) = mng_{\mathcal{L}}(\psi, m) \; and \; m \models_{\mathcal{L}} \varphi) \Longrightarrow m \models_{\mathcal{L}} \psi$ در مورد $\mathcal{L}_{\vdash}$ برقرار است و رابط نتیجه معنایی القا شده توسط $\models_{\vdash}$ با رابطه نحوی اصلی $\vdash$ منطبق می شود. بنابراین بکارگیری قضایا در منطق $\mathcal{L}_{\vdash}$ همانطور که انتظار داریم نتایجی در مورد $\langle F, \vdash \rangle$ ایجاد می کنند. در نتیجه مطالعه $\mathcal{L}_{\vdash}$ با مطالعه $\langle F, \vdash \rangle$ یکسان است.

فرض کنیم

$$M_{\vdash} =^{def} \{\langle T, h\rangle : T \subseteq F,\ T \textit{ is closed under } \vdash, h \textit{ is a homomorphism from } \mathfrak{F} \textit{ into } \mathfrak{F}\}$$

برای هر $\varphi \in F$ و هر $\langle T, h\rangle$ در $M_{\vdash}$ قرار می دهیم

$$mng_{\vdash}(\varphi, \langle T, h\rangle) =^{def} h(\varphi)$$

$$\langle T, h\rangle \models_{\vdash} \varphi \iff^{def} h(\varphi) \in T$$

بنابراین $\langle F, M_{\vdash}, mng_{\vdash}, \models_{\vdash}\rangle$ $\mathcal{L}_{\vdash} =^{def}$ منطقی است که برای تمام $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq F$، $\Gamma \models_{\vdash} \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$ برقرار است.

به علاوه اگر رابطه $\vdash$ در چند شرط طبیعی هم صدق کند، آنگاه $\mathcal{L}_{\vdash}$ یک منطق ساختاری Structural است. پس بنا به دلایل فوق می توانیم برشکل ساده شده زیر تمرکز کنیم واین محدودیت موقتی به کلیت نتایج آسیبی نمی رساند.

$$\mathcal{L} =^{def} \langle F_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}, mng_{\mathcal{L}}, \models_{\mathcal{L}}\rangle$$

برای هر مجموعه X، فرض می کنیم X^* مجموعه تمام دنباله های متناهی (لغات) روی X باشد. به این معنی که

$$X^* =^{def} \bigcup_{n\in\mathfrak{w}}({}^nX)$$

$${}^nX = \{(x_۱x_۲...x_n)|\ x_i \in X, ۱ \leq i \leq n\}$$

تعریف ۱. منظور از یک منطق $\mathcal{L}$ چهارتایی زیر است

$$\mathcal{L} =^{def} \langle F_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}, mng_{\mathcal{L}}, \models_{\mathcal{L}}\rangle$$

که در موارد زیر صدق می کند:

(i) $F_{\mathcal{L}}$ (مجموعه فرمول ها) مجموعه ای از دنباله های متناهی روی مجموعه ای مانند X است یعنی $F_{\mathcal{L}} \subseteq X^*$.

(ii) $M_{\mathcal{L}}$ یک کلاس است. (کلاس مدل ها نامیده می شود.)

(iii) $mng_{\mathcal{L}}$ تابعی است با دامنه $F_{\mathcal{L}} \times M_{\mathcal{L}}$ (تابع معنی نامیده می شود).

(iv) $\models_{\mathcal{L}}$ (رابط درستی) رابطه ای است بین $M_{\mathcal{L}}$ و $F_{\mathcal{L}}$ یعنی $\models_{\mathcal{L}} \subseteq M_{\mathcal{L}} \times F_{\mathcal{L}}$.

(v) برای هر $\varphi, \psi \in F_{\mathcal{L}}$ و هر $m \in M_{\mathcal{L}}$ فرض می کنیم که شرط زیر برقرار باشد

$$(mng_{\mathcal{L}}(\varphi, m) = mng_{\mathcal{L}}(\psi, m)\ \ and\ \ m \models_{\mathcal{L}} \varphi) \Longrightarrow m \models_{\mathcal{L}} \psi.$$

تعریف ۲. (نتیجه معنایی، فرمول های صادق)

فرض کنیم $\mathcal{L} = \langle F_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}, mng_{\mathcal{L}}, \models_{\mathcal{L}} \rangle$ یک منطق است. برای هر $m \in M_{\mathcal{L}}$ و هر $\sum \subseteq F_{\mathcal{L}}$،

$$m \models_{\mathcal{L}} \sum \Longleftrightarrow^{def} (\forall \varphi \in \sum)\ m \models_{\mathcal{L}} \varphi$$

$$Mod_{\mathcal{L}}\big(\sum\big) =^{def} \{m \in M_{\mathcal{L}} : m \models_{\mathcal{L}} \varphi\}$$

$Mod_{\mathcal{L}}\big(\sum\big)$، کلاس مدل های $\sum$ نامیده می شود.

$\models_{\mathcal{L}} \varphi$ فرمول φ صادق(درست) اگر و تنها اگر $Mod_{\mathcal{L}}(\{\varphi\}) = M_{\mathcal{L}}$.

برای هر $\sum \cup \{\varphi\} \subseteq F_{\mathcal{L}}$،

$$\sum \models_{\mathcal{L}} \varphi \Longleftrightarrow^{def} Mod_{\mathcal{L}}\big(\sum\big) \subseteq Mod_{\mathcal{L}}(\varphi)$$

$$C_{sq\mathcal{L}}\big(\sum\big) =^{def} \{\varphi \in F_{\mathcal{L}} : \sum \models_{\mathcal{L}} \varphi\}$$

اگر $\varphi \in C_{sq\mathcal{L}}$، گوییم φ یک نتیجه معنایی $\sum$ در منطق $\mathcal{L}$ است.

تعریف ۳. (نظریه = تئوری، مجموعه درستی ها)

فرض کنیم$\mathcal{L} = \langle F_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}, mng_{\mathcal{L}}, \models_{\mathcal{L}} \rangle$ یک منطق باشد. برای هر $K \subseteq M_{\mathcal{L}}$ فرض کنیم "نظریه یا تئوری K در $\mathcal{L}$" به صورت زیر تعریف شود:

$$Th_{\mathcal{L}}(K) =^{def} \{\varphi \in F_{\mathcal{L}} : \ (\forall m \in K) \ m \models_{\mathcal{L}} \varphi\}$$

اگر $K = \{m\}$، آنگاه می نویسیم $Th_{\mathcal{L}}(m)$.

مجموعه $Th_{\mathcal{L}}(M_{\mathcal{L}})$ مجموعه درستی های $\mathcal{L}$ نامیده می شود.

تعریف ۴. (تصمیم پذیری منطق ها)

می گوییم منطق $\mathcal{L} = \langle F_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}, mng_{\mathcal{L}}, \models_{\mathcal{L}} \rangle$ تصمیم پذیر است اگر و تنها اگر مجموعه $Th_{\mathcal{L}}(M_{\mathcal{L}})$ یک زیر مجموعه تصمیم پذیر از مجموعه $F_{\mathcal{L}}$ از فرمول ها باشد.

۲ مثال هایی از منطق های مختلف

تعریف ۵. (منطق گزاره ای کلاسیک $\mathcal{L}_S$)

فرض کنیم P مجموعه فرمول های اتمی $\mathcal{L}_S$ و $\{\wedge, \neg\}$ مجموعه رابط های منطقی $\mathcal{L}_S$. منطق گزاره ای مربوط به P، چهارتایی زیر تعریف می شود :

$$\mathcal{L}_S =^{def} \langle F_S, M_S, mng_S, \models_S \rangle$$

به طوری که

(i) مجموعه F_S فرمول ها، کوچکترین زیرمجموعه H است بطوریکه

- $P \subseteq H$
- $\varphi, \psi \in H \Longrightarrow (\neg\varphi) \in H, (\varphi \wedge \psi) \in H$

(ii) کلاس M_S مدل های $\mathcal{L}_S$ به صورت زیر تعریف می شود

$$M_S = \{\langle W, \mathfrak{v} \rangle : W \neq \emptyset, \mathfrak{v} : P \longrightarrow \mathbb{P}(W)\}$$

اگر $m = \langle W, \mathfrak{v} \rangle \in M_S$، آنگاه W مجموعه حالات ممکن (یا جهان ها یا موقعیت ها) m نامیده می شود.

(iii) فرض کنیم $\langle W, \mathfrak{v} \rangle \in M_S$، $w \in W$ و $\varphi \in F_S$. رابطه دو تایی $w \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$ را به صورت بازگشتی روی پیچیدگی فرمول ها تعریف می کنیم

–اگر $p \in P$، آنگاه $(w \Vdash_{\mathfrak{v}} p \Longleftrightarrow w \in \mathfrak{v}(p))$

–اگر $\psi_۱, \psi_۲ \in F_S$، آنگاه

$$w \Vdash_{\mathfrak{v}} \neg\psi_۱ \Longleftrightarrow w \nVdash_{\mathfrak{v}} \psi_۱$$

$$w \Vdash_{\mathfrak{v}} (\psi_۱ \wedge \psi_۲) \Longleftrightarrow w \Vdash_{\mathfrak{v}} \psi_۱ \; and \; w \Vdash_{\mathfrak{v}} \psi_۲$$

اگر $w \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$. گوییم که φ در جهان w درست است یا این که (φ forces w). اکنون

$$mng_S(\varphi, \langle W, \mathfrak{v}\rangle) = \{w \in W : w \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi\}$$

$$\langle W, \mathfrak{v}\rangle \models_S \varphi \ (\varphi \ is\ valid\ in\ \langle W, \mathfrak{v}\rangle),\ iff\ for\ every\ w \in W, w \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$$

تعریف ۶. (منطق موجهات $S_۵$)

(i) مجموعه رابط ها در این منطق $\{\wedge, \neg, \Diamond\}$ است.

(ii) مجموعه $F_{S_۵}$ همانند منطق $\mathcal{L}_S$ تعریف می شود و

$$\varphi \in F_{S_۵} \Longrightarrow \Diamond\varphi \in F_{S_۵}$$

(iii) $M_{S_۵} = M_S$

(iv) تعریف $\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ است و همچنین داریم

$$\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} \Diamond\varphi \Longleftrightarrow (\exists\, \omega' \in W)\ \omega' \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$$

(v) تابع $mng_{S_۵}$ و رابطه درستی $\models_{S_۵}$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ تعریف می شود.

حال منطق موجهات $S_۵$ عبارت است از :

$$S_۵ =^{def} \langle F_{S_۵}, M_{S_۵}, mng_{S_۵}, \models_{S_۵}\rangle$$

تعریف ۷. (منطق اختلاف $\mathcal{L}_D$)

(i) مجموعه رابط ها در این منطق $\{\wedge, \neg, D\}$ است.

(ii) مجموعه F_D همانند منطق $\mathcal{L}_S$ تعریف می شود و

$$\varphi \in F_D \Longrightarrow D\varphi \in F_D$$

(iii) $M_D = M_{S_5} = M_S$

(iv) تعریف $\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ است و همچنین داریم

$$\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} D\varphi \Longleftrightarrow (\exists\, \omega' \in W - \{\omega\})\, \omega' \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$$

(v) تابع mng_D و رابطه درستی $\models_D$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ تعریف می شود.

حال منطق اختلاف D عبارت است از :

$$\mathcal{L}_D =^{def} \langle F_D, M_D, mng_D, \models_D \rangle$$

تعریف ۸. (منطق بار-k $\mathcal{L}_{k-times}$)

(i) مجموعه رابط ها در این منطق $\{\wedge, \neg, \Diamond_k\}$ است.
(ii) مجموعه $F_{\Diamond_k}$ همانند منطق $\mathcal{L}_S$ تعریف می شود و

$$\varphi \in F_{\Diamond_k} \Longrightarrow \Diamond_k\varphi \in F_{\Diamond_k}$$

(iii) $M_{\Diamond_k} = M_D = M_{S_5} = M_S$
(iv) تعریف $\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ است و همچنین داریم

$$\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} \Diamond_k\varphi \Longleftrightarrow (\exists\, H \subseteq W)\ (|H| = k, (\forall\, \omega' \in H)\ \omega' \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi)$$

(v) تابع $mng_{\Diamond_k}$ و رابطه درستی $\models_{\Diamond_k}$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ تعریف می شود.

حال منطق بار-k $\mathcal{L}_{k-times}$ عبارت است از :

$$\mathcal{L}_{k-times} =^{def} \langle F_{\Diamond_k}, M_{\Diamond_k}, mng_{\Diamond_k}, \models_{\Diamond_k}\rangle$$

تعریف ۹. (منطق دوتایی $\mathcal{L}_{bin}$)

(i) مجموعه رابط ها در این منطق $\{\wedge, \neg, \blacklozenge\}$ است.
(ii) مجموعه F_{bin} همانند منطق $\mathcal{L}_S$ تعریف می شود و

$$\varphi \in F_{bin} \Longrightarrow \blacklozenge(\varphi, \psi) \in F_{bin}$$

(iii) $M_{bin} = M_{\Diamond_k} = M_D = M_{S_5} = M_S$
(iv) تعریف $\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ است و همچنین داریم

$$\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} \blacklozenge(\varphi, \psi) \Longleftrightarrow (\exists\, u, z \in W)\ (\omega \neq u \neq z \neq \omega\ and\ u \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi\ and\ z \Vdash_{\mathfrak{v}} \psi)$$

(v) تابع mng_{bin} و رابطه درستی $\models_{bin}$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ تعریف می شود.

حال منطق دوتایی $\mathcal{L}_{bin}$ عبارت است از :

$$\mathcal{L}_{bin} =^{def} \langle F_{bin}, M_{bin}, mng_{bin}, \models_{bin}\rangle$$

تعریف ۱۰. (منطق بیشتر $\mathcal{L}_{more}$)

(i) مجموعه رابط ها در این منطق $\{\wedge, \neg, \blacklozenge_{more}\}$ است.
(ii) مجموعه $F_{\blacklozenge_{more}}$ همانند منطق $\mathcal{L}_S$ تعریف می شود و

$$\varphi \in F_{\blacklozenge_{more}} \Longrightarrow \blacklozenge_{more}(\varphi, \psi) \in F_{\blacklozenge_{more}}$$

(iii) $M_{more} = M_{bin} = M_{\Diamond_k} = M_D = M_{S_\Diamond} = M_S$
(iv) تعریف $\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ است و همچنین داریم

$$\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} \blacklozenge(\varphi, \psi) \Longleftrightarrow \left|\{u \in W : u \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi\}\right| \geq \left|\{u \in W : u \Vdash_{\mathfrak{v}} \psi\}\right|$$

(v) تابع mng_{more} و رابطه درستی $\models_{more}$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ تعریف می شود.

حال منطق بیشتر $\mathcal{L}_{more}$ عبارت است از :

$$\mathcal{L}_{more} =^{def} \langle F_{more}, M_{more}, mng_{more}, \models_{more} \rangle$$

تا این جا منطق $\mathcal{L}$ را بدون تغییری در کلاس مدل ها M_S قوی تر کرده ایم. راحت ترین تغییر در M_S، در نظر گرفتن کلاسی از آن است.

تعریف ۱۱. (منطق جفت $\mathcal{L}_{pair}$)

(i) مجموعه رابط ها در این منطق $\{\wedge, \neg, \circ\}$ است.
(ii) مجموعه F_{pair} همانند منطق $\mathcal{L}_S$ تعریف می شود و

$$\varphi \in F_{pair} \Longrightarrow \varphi \circ \psi \in F_{pair}$$

(iii) $M_{pair} =^{def} \{\langle W, \mathfrak{v}\rangle \in M_S : W \subseteq U \times U \ for\ some\ set\ U\}$
(iv) تعریف $\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ است و همچنین داریم

$$\langle a,b\rangle \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi \circ \psi \Longleftrightarrow \exists c\,[\langle a,c\rangle, \langle c,b\rangle \in W \ and\ \langle a,c\rangle \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi \ and\ \langle c,b\rangle \Vdash_{\mathfrak{v}} \psi]$$

(v) تابع mng_{pair} و رابطه درستی $\models_{pair}$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ تعریف می شود.

حال منطق جفت $\mathcal{L}_{pair}$ عبارت است از :

$$\mathcal{L}_{pair} =^{def} \langle F_{pair}, M_{pair}, mng_{pair}, \models_{pair}\rangle$$

تعریف ۱۲. (Arrow logic $\mathcal{L}_{REL}$)

در این منطق همه چیز مانند منطق $\mathcal{L}_{pair}$ است و تنها تفاوت در ساختار مدل هاست.

$$M_{REL} =^{def} \{\langle W, \mathfrak{v}\rangle \in M_S : W = U \times U \ for\ some\ set\ U\rangle\}$$

تعریف ۱۳. (Arrow logic $\mathcal{L}_{ARW_\circ}, \mathcal{L}_{ARROW}, \mathcal{L}_{RA}$)

(i) مجموعه رابط ها در این منطق ها $\{\wedge, \neg, \circ, ^{-1}, Id\}$ است.

(ii) مجموعه $F_{ARW_\circ}$ همانند منطق $\mathcal{L}_{pair}$ تعریف می شود و

$$\varphi, \psi \in F_{ARW_\circ} \Longrightarrow \varphi^{-1} \in F_{ARW_\circ}, Id \in F_{AREW_\circ}$$

(iii) $M_{ARW_\circ} =^{def} \{\langle \langle W, \mathfrak{v}\rangle, C_1, C_2, C_3\rangle : \langle W, \mathfrak{v}\rangle \in M_S, C_1 \subseteq W \times W \times W, C_2 \subseteq W \times W, C_3 \subseteq W\}$

(iv) تعریف $\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ است و همچنین داریم

$$\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} (\varphi \circ \psi) \Longleftrightarrow (\exists\, \omega_1, \omega_2 \in W)\big(C_1(\omega, \omega_1, \omega_2)\ and\ \omega_1 \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi\ and\ \omega_2 \Vdash_{\mathfrak{v}} \psi\big)$$

$$\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi^{-1} \Longleftrightarrow (\exists\, \omega' \in W)\big(C_2(\omega, \omega')\ and\ \omega' \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi\big)$$

$$\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} Id \Longleftrightarrow C_3(\omega)$$

(v) تابع $mng_{ARW_\circ}$ و رابطه درستی $\models_{ARW_\circ}$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ تعریف می شود.

حال منطق $\mathcal{L}_{ARW_\circ}$ عبارت است از :

$$\mathcal{L}_{ARW_\circ} =^{def} \langle F_{ARW_\circ}, M_{ARW_\circ}, mng_{ARW_\circ}, \models_{ARW_\circ}\rangle$$

تعریف ۱۴. (Arrow logic $\mathcal{L}_{ARROW}$)

(i) $F_{ARROW} = F_{ARW_\circ}$

(ii) $M_{ARROW} = M_{pair}$

(iii) تعریف $\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$ مانند منطق $\mathcal{L}_{pair}$ است و همچنین داریم

$$\langle a, b\rangle \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi^{-۱} \iff \langle b, a\rangle \in W \; and \; \langle b, a\rangle \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$$

$$\langle a, b\rangle \Vdash_{\mathfrak{v}} Id \iff a = b$$

(v) تابع mng_{ARROW} و رابطه درستی $\models_{ARROW}$ مانند منطق $\mathcal{L}_S$ تعریف می شود.

حال منطق $\mathcal{L}_{ARROW}$ عبارت است از :

$$\mathcal{L}_{ARROW} =^{def} \langle F_{ARROW}, M_{ARROW}, mng_{ARROW}, \models_{ARROW}\rangle$$

تعریف ۱۵. (Arrow logic $\mathcal{L}_{RA}$)

(i) $F_{RA} = F_{ARROW}$

(ii) $M_{RA} = M_{REL}$

(iii) تعریف $\omega \Vdash_{\mathfrak{v}} \varphi$ مانند منطق $\mathcal{L}_{ARROW}$ است و .

حال منطق $\mathcal{L}_{RA}$ عبارت است از :

$$\mathcal{L}_{RA} =^{def} \langle F_{RA}, M_{RA}, mng_{RA}, \models_{RA}\rangle$$

۳ پلی بین جهان منطق ها و جهان جبرها

همتای جبری منطق کلاسیک گزاره ای $\mathcal{L}_S$، چند گونای جبر های بولی BA است. در ادامه کارآیی نقش

BA نسبت به $\mathcal{L}_S$ را به کارآیی جبر در حالت کلی نسبت به منطق ها تعمیم می دهیم. یک روش انتقال

استاندارد از منطق به جبر معرفی می کنیم که به هر منطق $\mathcal{L}$ کلاسی از جبرها با علامت $Alg_{\models}(\mathcal{L})$ نسبت داده می شود.

در این روش، سوال جبری مربوط به یک سوال منطقی را پیدا می کنیم. اگر سوال درباره منطق $\mathcal{L}$ باشد ،

معادل جبری آن درباره $Alg_{\models}(\mathcal{L})$ خواهد بود.

مثلا اگر بخواهیم بدانیم منطق $\mathcal{L}$ در خاصیت craig's interpolation صدق می کند، کافی است ببینیم

که آیا $Alg_{\models}(\mathcal{L})$ در خاصیت صدقAmalgamation می کند یا خیر.

در این جا قصد داریم زیرکلاسی از منطق ها تحت عنوان nice logic را معرفی کنیم. برای دستیابی به این منظور به تعریف چند خاصیت احتیاج هست.

تعریف ۱۶. ($\mathcal{L}$ has logical connectives) $\mathcal{L}$ رابط های منطقی دارد به این معنی است که

(i) مجموعه $C_n(\mathcal{L})$ به نام رابط های منطقی $\mathcal{L}$ وجود دارد و ثابت است. هر $c \in C_n(\mathcal{L})$ دارای مرتبه $rank(c) \in \omega$ و رابط ها از مرتبه k با علامت $C_{n_k}(\mathcal{L})$ نشان داده می شود.

(ii) مجموعه P به نام فرمول های اتمی وجود دارد به طوری که F کوچکترین مجموعه ای است که در شرایط زیر صدق می کند:

$$P \subseteq F,$$

$$If\ c \in C_{n_k}(\mathcal{L})\ and\ \varphi_۱, ..., \varphi_k \in F,\ then\ c(\varphi_۱, ..., \varphi_k) \in F$$

* جبر فرمول های $\mathcal{L}$ = $\mathbb{F}$ = $\langle F, c\rangle_{c\in C_n(L)}$

تعریف ۱۷. (Compositional)

$\mathcal{L}$ ترکیبی است به این معنی که:

(i) $\mathcal{L}$ رابط های منطقی دارد.

(ii) تابع $\langle mng(\varphi, \mathfrak{m}) : \varphi \in F\rangle$ $=^{def}$ $mng_{\mathfrak{m}}$، برای هر $\mathfrak{m} \in M$ یک همریختی از جبر $\mathbb{F}$ است.

تعریف معادل برای خاصیت ترکیبی این است که هسته تابع $mng_{\mathfrak{m}}$ یک رابطه هم نهشتی روی جبر فرمول هاست.

$$Ker(mng_{\mathfrak{m}}) = \{\langle a, b\rangle \mid \ mng_{\mathfrak{m}}(a) = mng_{\mathfrak{m}}(b)\}$$

بنابراین $\mathcal{L}$ خاصیت ترکیبی دارد اگر و فقط اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$for\ all\ i = ۱, ..., k,\ \ if\ mng_{\mathfrak{m}}(\varphi_i) = mng_{\mathfrak{m}}(\psi_i),\ \ then\ mng_{\mathfrak{m}}(c(\varphi_۱, ..., \varphi_k)) = mng_{\mathfrak{m}}(c(\psi_۱, ..., \psi_k))$$

تعریف ۱۸. (Filter property)

گوییم $\mathcal{L}$ خاصیت صافی دارد اگر و تنها اگر رابط های منتج یکتایی مانند $\varepsilon_۰, ...\varepsilon_{m-۱}$ و $\delta_۰, ..., \delta_{m-۱}$ و دو تایی مانند $\Delta_۰, ..., \Delta_{n-۱}$ وجود داشته باشند به طوری که

(i) برای هر $\mathfrak{m} \in M$ و $\varphi, \psi \in F$

$$mng_{\mathfrak{m}}(\varphi) = mng_{\mathfrak{m}}(\psi) \iff (\forall\ i < n)\ \mathfrak{m} \vDash \varphi \Delta_i \psi$$

(ii) برای هر $\mathfrak{m} \in M$ و $\varphi \in F$

$$\mathfrak{m} \vDash \varphi \iff (\forall\ j < m)\ (\forall\ i < n)\ \varepsilon_j(\varphi)\Delta_i\delta_j(\varphi)$$

تعریف ۱۹. (خاصیت جانشینی نحوی)

گوییم $\mathcal{L}$ خاصیت جانشینی نحوی دارد هرگاه

$$(\forall\ \psi, \varphi_\circ, ..., \varphi_k \in F)\ (\forall\ p_\circ, ..., p_k \in P)\ (\vDash \psi(\bar{p}) \Longrightarrow \psi(\bar{p}/\bar{\varphi}))$$

که در آن $\bar{p} = \langle p_\circ, ..., p_k \rangle, \bar{\varphi} = \langle \varphi_\circ, ..., \varphi_k \rangle$ و منظور از $\psi(\bar{p}/\bar{\varphi})$ فرمولی است که از ψ با جانشینی φ_i به جای p_i $(i \leq k)$ به دست می آید.

تعریف ۲۰. (خاصیت جانشینی معنایی)

گوییم $\mathcal{L}$ خاصیت جانشینی معنایی دارد هرگاه

$$(\forall\ s \in {}^pF)(\forall\ \mathfrak{m} \in M)(\exists\ \mathfrak{n} \in M)(\forall\ \varphi(p_{i_\circ}, ..., p_{i_k}) \in F)$$
$$mng_{\mathfrak{n}}(\varphi) = mng_{\mathfrak{m}}\big(\varphi(p_{i_\circ}/s(p_{i_\circ}), ..., p_{i_k}/s(p_{i_k}))\big)$$

اگر $\hat{s} \in {}^FF$ تعمیم طبیعی s به F باشد، آنگاه رابطه فوق می گوید که

$$mng_{\mathfrak{n}}(\varphi) = mng_{\mathfrak{m}}(\hat{s}(\varphi))$$

مدل $\mathfrak{n}$ نوع جانشین شده $\mathfrak{m}$ از طریق جانشینی s نام دارد.

صورت معادل رابطه فوق شرط طبیعی زیر است:

$$(\forall h \in Hom(\mathbb{F}, \mathbb{F}))(\forall \mathfrak{m} \in M)(\exists n \in M)\ mng_{\mathfrak{n}} = mng_{\mathfrak{m}} \circ h$$

صورت معادل دیگر این است که:

$$(\forall \mathfrak{m} \in M)(\forall h \in Hom(\mathbb{F}, \mathbb{F}))(\exists n \in M)\ mng_{\mathfrak{n}} = h$$

تعریف ۲۱. گوییم $\mathcal{L}$ یک nice logic است هرگاه خواص ترکیبی، صافی و جانشینی نحوی را دارا باشد.

گوییم $\mathcal{L}$ یک strongly nice logic است هرگاه nice logic باشد و خاصیت جانشینی معنایی را هم دارا باشد.

بنا به Blok و Pigozzi منطق هایی که خاصیت ترکیبی، جانشینی معنایی و جانشینی نحوی را دارا باشند، منطق های ساختاری structrul logic نامیده می شوند.

۱.۳ همتای جبری منطق $\mathcal{L}$

اگر K کلاسی از جبر های مشابه باشد، آنگاه

$$IK = \{\mathfrak{m} : \ (\exists \mathfrak{n} \in K)\ \mathfrak{m}\ is\ isomorphic\ to\ \mathfrak{n}\}$$

فرض کنیم $\mathcal{L} = \langle F, M, mng, \models\rangle$ یک منطق ترکیبی باشد، آنگاه

(i) اگر $K \subseteq M$، آنگاه برای $\varphi, \psi \in F$ تعریف می کنیم

$$\varphi \sim_K \psi \iff (\forall \mathfrak{m} \in K)\ mng_{\mathfrak{m}}(\varphi) = mng_{\mathfrak{m}}(\psi)$$

بنابراین $\sim_K$ یک رابطه هم ارزی است و چون $\mathcal{L}$ خاصیت ترکیبی دارد، یک رابطه هم نهشتی روی $\mathbb{F}$ است.

$\mathbb{F}/\sim_K$ جبر خارج قسمتی $\mathbb{F}$ القاء شده توسط $\sim_K$ است.

حال تعریف می کنیم:

$$Alg_{\models}(\mathcal{L}) =^{def} I\{\mathbb{F}/\sim_K : \ K \subseteq M\}$$

بعلاوه

(ii) $Alg_m(\mathcal{L}) =^{def} \{mng_{\mathfrak{m}}(\mathbb{F}) : \ \mathfrak{m} \in M\}$

۴ مثال ملموس

If $\mathcal{L}$ is a class of consistent logically equivalent in S with semi-negation, then for every consistent $\mathcal{L}$-theory $\mathcal{S}(\mathcal{A}) = (\mathcal{L}, C_{\mathcal{L}}, \mathcal{A})$ there exists a maximal $\mathcal{L}$-theory $\mathcal{S}(\mathcal{A}') = (\mathcal{L}, C_{\mathcal{L}}, \mathcal{A}')$ s.t. $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \subset C_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}')$

1. $\mathcal{L} = (P, F)$
2. $C_{\mathcal{L}}$: a consequence operation in $\mathcal{L}$ determined by a set $\mathcal{A}_x$ of logical axioms and by $R = \{(r_1), \ldots, (r_k)\}$ of rules of inference.
3. $\mathcal{S} = (\mathcal{L}, C_{\mathcal{L}})$: system of propositional calculus.
4. $C_{\mathcal{L}}(\emptyset)$: the set of derivable formulas in $\mathcal{S}$

Definition: The system $\mathcal{S}$ is in S if the following conditions hold:

(s_1) $\mathcal{A}_x$ is closed and substitution.
(s_2) the rules of inference (r_i) are invariant under substitution.
(s_3) for every $\alpha \in F$, $(\alpha \Longrightarrow \alpha) \in C_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$
(s_4) for all $\alpha, \beta \in F$, if $\alpha, \alpha \Longrightarrow \beta \in C_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$, then $\beta \in C_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}$.
(s_5) $(\alpha \Longrightarrow \beta), (\beta \Longrightarrow \gamma) \in C_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$, then $\alpha \Longrightarrow \gamma \in C_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$.
(s_6) for all $\alpha \in F$, if $\alpha \in C_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$, then $(\beta \Longrightarrow \alpha) \in C_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$.
(s_7) $(\alpha \Longrightarrow \beta), (\beta \Longrightarrow \alpha) \in C_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$, then $(\circ\alpha \Longrightarrow \circ\beta) \in C_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$
(s_8) for $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$, if $(\alpha \Longrightarrow \beta), (\beta \Longrightarrow \alpha), (\gamma \Longrightarrow \delta), (\delta \Longrightarrow \gamma) \in C_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$, then $\big((\alpha \circ \gamma) \Longrightarrow (\beta \circ \delta)\big) \in C_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$.

Definition($\mathcal{S}$-algebra):
Any system $\mathcal{S} = (\mathcal{L}, C_{\mathcal{L}})$ of propositional calculus in S determines a class of abstract algebra as follows:

$$\mathfrak{A} = (A, 1, \Longrightarrow, C_i)$$

with the conditions:

(a_1) if $\alpha \in \mathcal{A}_x$, then $v_{\mathfrak{A}}(\alpha) = 1$ for every evaluation v of $\mathcal{S}$ in $\mathfrak{A}$.

(a_2) if $(r)\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\beta}$, then for every evaluation v of $\mathcal{S}$ in $\mathfrak{A}$, if $v_{\mathfrak{A}}(\alpha_i) = 1$, then $v_{\mathfrak{A}}(\beta) = 1$.

(a_3) for all $a, b, c \in A$, if $a \Longrightarrow b = 1$ and $b \Longrightarrow c = 1$, then $a \Longrightarrow c = 1$.

(a_4) for all $a, b \in A$, if $a \Longrightarrow b = 1$ and $b \Longrightarrow a = 1$, then $a = b$.

$\star$ If $\alpha \in F$ is derivable in $\mathcal{S}(\mathcal{L}, C_{\mathcal{L}})$ (i.e. $\alpha \in C_{\mathcal{L}}(\emptyset)$), then $\mathfrak{A}(\alpha) = 1$.

۵ مراجع

1. Andreka et al, Algebraic Logic (2007), Preprint.

2. Donald W. Barnes, John M. Mack, An Algebraic Introduction to Mathematical Logic, Springer (1975).

3. J. M. Font, D. Piggozi, A Survey of Abstract Algebraic Logic (2003), Preprint.

4. H. Rasiowa, Algebraic Approach to Non-classical Logic (1974).

با سپاس از توجه شما

آذر ماه ۱۳۹۳