دربارەی استدلالی غیرصوری در مقالەی کلاسیکِ گودل (۱۹۳۱)

سعید صالحی پورمهر و کاوه لاجوردی

دوشنبه ۲۷ آبان ۱۳۹۸
سخنرانی ماهانەی انجمن منطق ایران

THEORIA
THEORIA, 2019, **85**, 8–17
doi:10.1111/theo.12169

On the Arithmetical Truth of Self-Referential Sentences

by

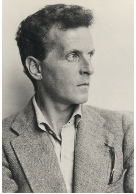
KAAVE LAJEVARDI
La Société des Philosophes Chômeurs

and

SAEED SALEHI
University of Tabriz

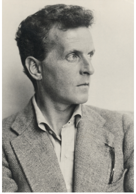
Abstract: We take an argument of Gödel's from his ground-breaking 1931 paper, generalize it, and examine its validity. The argument in question is this: *the sentence G says about itself that it is not provable, and G is indeed not provable; therefore, G is true.*

Keywords: Gödel's first incompleteness theorem, the Gödel sentence, self-reference, truth, arithmetic, soundness, ω-consistency



Ludwig ***Wittgenstein***:

I imagine someone asking my advice; he says: "I have constructed a proposition (I will use 'P' to designate it) in Russell's symbolism, and by means of certain definitions and transformations it can be so interpreted that it says: 'P is not provable in Russell's system'. Must I not say that this proposition on the one hand is true, and on the other hand is unprovable? For suppose it were false; then it is true that it is provable. And that surely cannot be! And if it is proved, then it is proved that it is not provable. Thus it can only be true, but unprovable."



Ludwig ***Wittgenstein***:

I imagine someone asking my advice; he says: "I have constructed a proposition (I will use 'P' to designate it) in Russell's symbolism, and by means of certain definitions and transformations it can be so interpreted that it says: 'P is not provable in Russell's system'. Must I not say that this proposition on the one hand is true, and on the other hand is unprovable? For suppose it were false; then it is true that it is provable. And that surely cannot be! And if it is proved, then it is proved that it is not provable. Thus it can only be true, but unprovable."

Just as we ask, "'provable' in what system?", so we must also ask, "'true' in what system?" True in Russell's system' means, as was said: proved in Russell's system; and 'false in Russell's system' means: the opposite has been proved in Russell's system. —Now what does your "suppose it is false" mean? *In the Russell sense* it means 'suppose the opposite is proved in Russell's system'; *if that is your assumption*, you will now presumably give up the interpretation that it is unprovable. And by 'this interpretation' I understand the translation into this English sentence. —If you assume that the proposition is provable in Russell's system, that means it is true *in the Russell sense*, and the interpretation "P is not provable" again has to be given up. If you assume that the proposition is true in the Russell sense, the *same* thing follows.

> Further: if the proposition is supposed to be false in some other than the Russell sense, then it does not contradict this for it to be proved in Russell's system. (What is called "losing" in chess may constitute winning in another game.)

— Ludwig Wittgenstein,
Remarks on the Foundations of Mathematics,
G.H. von Wright & R. Rhees (eds.), G.E.M. Anscombe (translator), (The MIT Press, revised ed., 1978), I, Appendix III, §8, pp. 118 f.

- Juliet Floyd and Hilary Putnam,
A Note on Wittgenstein's "Notorious Paragraph" about the Gödel Theorem, *The Journal of Philosophy* 97:11 (2000) 624–632.

> Further: if the proposition is supposed to be false in some other than the Russell sense, then it does not contradict this for it to be proved in Russell's system. (What is called "losing" in chess may constitute winning in another game.)

— Ludwig Wittgenstein,
Remarks on the Foundations of Mathematics,
G.H. von Wright & R. Rhees (eds.), G.E.M. Anscombe (translator), (The MIT Press, revised ed., 1978), I, Appendix III, §8, pp. 118 f.

- Juliet Floyd and Hilary Putnam,
A Note on Wittgenstein's "Notorious Paragraph" about the Gödel Theorem, *The Journal of Philosophy* 97:11 (2000) 624–632.

- Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I

  Monatshefte für Mathematik und Physik 38:1 (1931) 173–198.

- On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I

- Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I

Monatshefte für Mathematik und Physik 38:1 (1931) 173–198.

- On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I

- Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I

  Monatshefte für Mathematik und Physik 38:1 (1931) 173–198.

- On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I

- Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I

  Monatshefte für Mathematik und Physik 38:1 (1931) 173–198.

- On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I

- Aus der Bemerkung, daß $[R(q); q]$ seine eigene Unboweisbarkeit behauptet, folgt sofort, daß $[R(q); q]$ richtig ist, denn $[R(q); q]$ **ist** ja unbeweisbar (weil unentscheidbar).

- From the remark that $[R(q); q]$ says about itself that it is not provable, it follows at once that $[R(q); q]$ is true, for $[R(q); q]$ ***is*** indeed unprovable (being undecidable).

- از این نکته که $[R(q); q]$ درباره‌ی خودش می‌گوید که اثبات‌ناپذیر است، فوراً نتیجه می‌شود که $[R(q); q]$ صادق است، چرا که $[R(q); q]$ فی‌الواقع اثبات‌ناپذیر هست (چون تصمیم‌ناپذیر است).

G درباره‌ی خودش می‌گوید که اثبات‌ناپذیر است؛ به‌علاوه، G فی‌الواقع اثبات‌ناپذیر است. بنابراین G صادق است.

- Aus der Bemerkung, daß $[R(q); q]$ seine eigene Unboweisbarkeit behauptet, folgt sofort, daß $[R(q); q]$ richtig ist, denn $[R(q); q]$ **ist** ja unbeweisbar (weil unentscheidbar).

- From the remark that $[R(q); q]$ says about itself that it is not provable, it follows at once that $[R(q); q]$ is true, for $[R(q); q]$ ***is*** indeed unprovable (being undecidable).

- از این نکته که $[R(q); q]$ دربارهی خودش می‌گوید که اثبات‌ناپذیر است، فوراً نتیجه می‌شود که $[R(q); q]$ صادق است، چرا که $[R(q); q]$ فی‌الواقع اثبات‌ناپذیر هست (چون تصمیم‌ناپذیر است).

G دربارهی خودش می‌گوید که اثبات‌ناپذیر است؛ به‌علاوه، G فی‌الواقع اثبات‌ناپذیر است. بنابراین G صادق است.

- Aus der Bemerkung, daß $[R(q);q]$ seine eigene Unboweisbarkeit behauptet, folgt sofort, daß $[R(q);q]$ richtig ist, denn $[R(q);q]$ **ist** ja unbeweisbar (weil unentscheidbar).

- From the remark that $[R(q);q]$ says about itself that it is not provable, it follows at once that $[R(q);q]$ is true, for $[R(q);q]$ ***is*** indeed unprovable (being undecidable).

- از این نکته که $[R(q);q]$ دربارهٔ خودش می‌گوید که اثبات‌ناپذیر است، فوراً نتیجه می‌شود که $[R(q);q]$ صادق است، چرا که $[R(q);q]$ فی‌الواقع اثبات‌ناپذیر هست (چون تصمیم‌ناپذیر است).

G دربارهٔ خودش می‌گوید که اثبات‌ناپذیر است؛ به‌علاوه، G فی‌الواقع اثبات‌ناپذیر است. بنابراین G صادق است.

- Aus der Bemerkung, daß $[R(q); q]$ seine eigene Unboweisbarkeit behauptet, folgt sofort, daß $[R(q); q]$ richtig ist, denn $[R(q); q]$ **ist** ja unbeweisbar (weil unentscheidbar).

- From the remark that $[R(q); q]$ says about itself that it is not provable, it follows at once that $[R(q); q]$ is true, for $[R(q); q]$ ***is*** indeed unprovable (being undecidable).

- از این نکته که $[R(q); q]$ دربارهٔی خودش می‌گوید که اثبات‌ناپذیر است، فوراً نتیجه می‌شود که $[R(q); q]$ صادق است، چرا که $[R(q); q]$ فی‌الواقع اثبات‌ناپذیر هست (چون تصمیم‌ناپذیر است).

G دربارهٔی خودش می‌گوید که اثبات‌ناپذیر است؛ به‌علاوه، G فی‌الواقع اثبات‌ناپذیر است. بنابراین G صادق است.

به نظر می‌رسد که ساختارِ منطقیِ استدلالِ گودل این باشد:

۱ جملەی A دربارەی خودش می‌گوید که خاصیتِ F دارد.
۲ جملەی A فی‌الواقع خاصیتِ F دارد.

بنابراین

۳ جملەی A صادق است.

به نظر می‌رسد که ساختارِ منطقیِ استدلالِ گودل این باشد:

۱ جملهٔ A دربارهٔ خودش می‌گوید که خاصیتِ F دارد.

۲ جملهٔ A فی‌الواقع خاصیتِ F دارد.

بنابراین

۳ جملهٔ A صادق است.

به نظر می‌رسد که ساختارِ منطقیِ استدلالِ گودل این باشد:

۱. جمله‌ی A درباره‌ی خودش می‌گوید که خاصیتِ F دارد.
۲. جمله‌ی A فی‌الواقع خاصیتِ F دارد.

بنابراین

۳. جمله‌ی A صادق است.

به نظر می‌رسد که ساختارِ منطقیِ استدلالِ گودل این باشد:

۱ جمله‌ی A درباره‌ی خودش می‌گوید که خاصیتِ F دارد.
۲ جمله‌ی A فی‌الواقع خاصیتِ F دارد.
بنابراین
۳ جمله‌ی A صادق است.

- فرض کنیم نظریه‌ی پیش‌زمینه‌ی بحث، نظریه‌ی T باشد (مثلاً نظامِ پرینکیپیا متمتیکای راسل و وایتهد).

- جمله‌ی A درباره‌ی خودش می‌گوید که خاصیتِ F دارد: $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$.

- Volker Halbach & Albert Visser, Self-Reference in Arithmetic, I & II, *The Review of Symbolic Logic* 7:4 (2014) 671–691 & 692–712.

- جمله‌ی φ فی‌الواقع درست است: $\mathbb{N} \models \varphi$.

- بازنویسی استدلال:

1. $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$,
2. $\mathbb{N} \models F(\#A)$

---

3. $\therefore \quad \mathbb{N} \models A$.

- فرض کنیم نظریه‌ی پیش‌زمینه‌ی بحث، نظریه‌ی T باشد (مثلاً نظامِ پرینکیپیا متمتیکای راسل و وایتهد).

- جمله‌ی A درباره‌ی خودش می‌گوید که خاصیتِ F دارد: $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$.

- Volker Halbach & Albert Visser,
Self-Reference in Arithmetic, I & II,
The Review of Symbolic Logic 7:4 (2014) 671–691 & 692–712.

- جمله‌ی φ فی‌الواقع درست است: $\mathbb{N} \vDash \varphi$.

- بازنویسی استدلال:

1. $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$,
2. $\mathbb{N} \vDash F(\#A)$

---

3. $\therefore \quad \mathbb{N} \vDash A$.

- فرض کنیم نظریه‌ی پیش‌زمینه‌ی بحث، نظریه‌ی T باشد (مثلاً نظامِ پرینکیپیا متمتیکای راسل و وایتهد).

- جمله‌ی A درباره‌ی خودش می‌گوید که خاصیتِ F دارد: $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$.

- Volker Halbach & Albert Visser,
Self-Reference in Arithmetic, I & II,
The Review of Symbolic Logic 7:4 (2014) 671–691 & 692–712.

- جمله‌ی φ فی‌الواقع درست است: $\mathbb{N} \models \varphi$.

- بازنویسی استدلال:

1. $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$,
2. $\mathbb{N} \models F(\#A)$

---

3. $\therefore \quad \mathbb{N} \models A$.

- فرض کنیم نظریه‌ی پیش‌زمینه‌ی بحث، نظریه‌ی T باشد (مثلاً نظامِ پرینکیپیا متمتیکای راسل و وایتهد).

- جمله‌ی A درباره‌ی خودش می‌گوید که خاصیتِ F دارد: $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$.

- Volker Halbach & Albert Visser,
Self-Reference in Arithmetic, I & II,
The Review of Symbolic Logic 7:4 (2014) 671–691 & 692–712.

- جمله‌ی φ فی‌الواقع درست است: $\mathbb{N} \vDash \varphi$.

- بازنویسی استدلال:

1. $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$,
2. $\mathbb{N} \vDash F(\#A)$

3. $\therefore \quad \mathbb{N} \vDash A$.

- فرض کنیم نظریه‌ی پیش‌زمینه‌ی بحث، نظریه‌ی T باشد (مثلاً نظامِ پرینکیپیا متمتیکای راسل و وایتهد).

- جمله‌ی A درباره‌ی خودش می‌گوید که خاصیتِ F دارد: $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$.

- Volker Halbach & Albert Visser,
Self-Reference in Arithmetic, I & II,
The Review of Symbolic Logic 7:4 (2014) 671–691 & 692–712.

- جمله‌ی φ فی‌الواقع درست است: $\mathbb{N} \vDash \varphi$.

- بازنویسی استدلال:

1. $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$,
2. $\mathbb{N} \vDash F(\#A)$

---

3. $\therefore \quad \mathbb{N} \vDash A$.

- بازنویسی استدلال:

1. $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$,
2. $\mathbb{N} \vDash F(\#A)$

---

3. $\therefore \quad \mathbb{N} \vDash A$.

این استدلال معتبر نیست، حتی اگر فرض کنیم T نظریه‌ای است ω–سازگار.

در ادامه:

- دلیل‌مان برای نامعتبر بودنِ این استدلال.
- خوانش‌های دیگری از استدلالِ گودل.
- آیا نسبت به گودل بی‌انصافی کرده‌ایم؟ آیا بازنویسی‌مان زیاده‌ازحد انتزاعی بوده است؟
- آیا، بالاخره، جمله‌ی گودل صادق است؟
- آیا تعریفِ رایجِ «جمله‌ی گودل» تعریفِ مناسبی است؟
- ...
- پرسش و پاسخ.
- پذیرایی.

- بازنویسی استدلال:

1. $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$,
2. $\mathbb{N} \vDash F(\#A)$

---

3. $\therefore \quad \mathbb{N} \vDash A$.

این استدلال معتبر نیست، حتی اگر فرض کنیم T نظریه‌ای است ω-سازگار.

در ادامه:

- دلیل‌مان برای نامعتبر بودنِ این استدلال.
- خوانش‌های دیگری از استدلالِ گودل.
- آیا نسبت به گودل بی‌انصافی کرده‌ایم؟ آیا بازنویسی‌مان زیاده‌ازحد انتزاعی بوده است؟
- آیا، بالاخره، جمله‌ی گودل صادق است؟
- آیا تعریفِ رایجِ «جمله‌ی گودل» تعریفِ مناسبی است؟
- ...
- پرسش و پاسخ.
- پذیرایی.

- بازنویسی استدلال:

$$
\begin{array}{ll}
1. & T \vdash A \leftrightarrow F(\#A), \\
2. & \mathbb{N} \vDash F(\#A) \\
\hline
3. & \therefore \quad \mathbb{N} \vDash A.
\end{array}
$$

این استدلال معتبر نیست، حتی اگر فرض کنیم T نظریه‌ای است ω-سازگار.

در ادامه:

- دلیل‌مان برای نامعتبر بودنِ این استدلال.
- خوانش‌های دیگری از استدلالِ گودل.
- آیا نسبت به گودل بی‌انصافی کرده‌ایم؟ آیا بازنویسی‌مان زیاده‌ازحد انتزاعی بوده است؟
- آیا، بالاخره، جمله‌ی گودل صادق است؟
- آیا تعریفِ رایجِ «جمله‌ی گودل» تعریفِ مناسبی است؟
- ...
- پرسش و پاسخ.
- پذیرایی.

دلیل‌مان برای نامعتبر بودنِ این استدلال (۱)

اگر نظریه صحیح باشد:

استدلالِ غیرصوریِ گودل معتبر است، هرگاه نظریه‌ی ما صحیح باشد.

لم.

هرگاه $\mathbb{N} \vDash T$، آنگاه $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$ و $\mathbb{N} \vDash F(\#A)$ نتیجه می‌دهند که $\mathbb{N} \vDash A$.

اثبات.

از $\mathbb{N} \vDash T$ و $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$ داریم $\mathbb{N} \vDash A \leftrightarrow F(\#A)$، پس از $\mathbb{N} \vDash F(\#A)$ فوراً نتیجه می‌شود که $\mathbb{N} \vDash A$. $\square$

دلیل‌مان برای نامعتبر بودنِ این استدلال (۱)

اگر نظریه صحیح باشد:

استدلالِ غیرصوریِ گودل معتبر است، هرگاه نظریه‌ی ما صحیح باشد.

لم.

هرگاه $\mathbb{N} \vDash T$، آنگاه $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$ و $\mathbb{N} \vDash F(\#A)$ نتیجه می‌دهند که $\mathbb{N} \vDash A$.

اثبات.

از $\mathbb{N} \vDash T$ و $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$ داریم $\mathbb{N} \vDash A \leftrightarrow F(\#A)$، پس از $\mathbb{N} \vDash F(\#A)$ فوراً نتیجه می‌شود که $\mathbb{N} \vDash A$. □

دلیل‌مان برای نامعتبر بودنِ این استدلال (۱)

اگر نظریه صحیح باشد:

استدلالِ غیرصوریِ گودل معتبر است، هرگاه نظریه‌ی ما صحیح باشد.

لم.

هرگاه $T \models \mathbb{N}$، آنگاه $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$ و $\mathbb{N} \models F(\#A)$ نتیجه می‌دهند که $\mathbb{N} \models A$.

اثبات.

از $\mathbb{N} \models T$ و $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$ داریم $\mathbb{N} \models A \leftrightarrow F(\#A)$، پس از $\mathbb{N} \models F(\#A)$ فوراً نتیجه می‌شود که $\mathbb{N} \models A$. $\square$

دلیلمان برای نامعتبر بودنِ این استدلال (۲)

اگر نظریه صحیح نباشد (و فقط ω-سازگار باشد):

درست قبل از مطلب اشاره شده در بالا (در مورد درستی جمله تصمیمناپذیر) گودل مینویسد که:

The method of proof just explained can clearly be applied to any formal system that, first, when interpreted as representing a system of notions and propositions, has at its disposal sufficient means of expressions to define the notions occurring in the argument above (in particular, the notion "provable formula") and in which, second, every provable formula is true in the interpretation considered. The purpose of carrying out the above proof with full precision in what follows is, among other things, to replace the second of the assumptions just mentioned by a purely formal and much weaker one.

دلیل‌مان برای نامعتبر بودنِ این استدلال (۲)

اگر نظریه صحیح نباشد (و فقط ω-سازگار باشد):

درست قبل از مطلب اشاره شده در بالا (در مورد درستی جمله تصمیم‌ناپذیر) گودل می‌نویسد که:

> The method of proof just explained can clearly be applied to any formal system that, first, when interpreted as representing a system of notions and propositions, has at its disposal sufficient means of expressions to define the notions occurring in the argument above (in particular, the notion "provable formula") and in which, second, every provable formula is true in the interpretation considered. The purpose of carrying out the above proof with full precision in what follows is, among other things, to replace the second of the assumptions just mentioned by a purely formal and much weaker one.

دلیل‌مان برای نامعتبر بودنِ این استدلال (۲)

اگر نظریه صحیح نباشد (و فقط ω-سازگار باشد):

پس باید یک نظریه ω-سازگار U چنان وجود داشته باشد که ناصحیح هست.

یعنی جمله کاذب Φ چنان وجود دارد که $U \vdash \Phi$ (ولی $\mathbb{N} \nvDash \Phi$).

قضیه.

برای هر نظریه ناصحیح U، یک خاصیت $F(x)$ و یک جمله کاذب Φ چنان وجود دارند که $U \vdash \Phi \leftrightarrow F(\#\Phi)$ و $\mathbb{N} \vDash F(\#\Phi)$ (همچنین $U \vdash F(\#\Phi)$؛ ولی $\mathbb{N} \nvDash \Phi$).

اثبات.

اگر Φ جمله‌ای کاذب و اثبات‌پذیر در U باشد، قرار دهید $F(x) = (x = \#\Phi)$.
به وضوح داریم $\mathbb{N} \vDash F(\#\Phi)$ و نیز $U \vdash F(\#\Phi)$.
همینطور از $U \vdash \Phi$ نتیجه می‌شود که $U \vdash \Phi \leftrightarrow F(\#\Phi)$. □

دلیل‌مان برای نامعتبر بودنِ این استدلال (۲)

اگر نظریه صحیح نباشد (و فقط ω-سازگار باشد):

پس باید یک نظریه ω-سازگار U چنان وجود داشته باشد که ناصحیح هست.

یعنی جمله کاذب Φ چنان وجود دارد که $U \vdash \Phi$ (ولی $\mathbb{N} \nvDash \Phi$).

قضیه.

برای هر نظریه ناصحیح U، یک خاصیت $F(x)$ و یک جمله کاذب Φ چنان وجود دارند که $U \vdash \Phi \leftrightarrow F(\#\Phi)$ و $\mathbb{N} \vDash F(\#\Phi)$ (همچنین $U \vdash F(\#\Phi)$؛ ولی $\mathbb{N} \nvDash \Phi$).

اثبات.

اگر Φ جمله‌ای کاذب و اثبات‌پذیر در U باشد، قرار دهید $F(x) = (x = \#\Phi)$.

به وضوح داریم $\mathbb{N} \vDash F(\#\Phi)$ و نیز $U \vdash F(\#\Phi)$.

همینطور از $U \vdash \Phi$ نتیجه می‌شود که $U \vdash \Phi \leftrightarrow F(\#\Phi)$. □

دلیل‌مان برای نامعتبر بودنِ این استدلال (۲)

اگر نظریه صحیح نباشد (و فقط ω-سازگار باشد):

پس باید یک نظریه ω-سازگار U چنان وجود داشته باشد که ناصحیح هست.

یعنی جمله کاذب Φ چنان وجود دارد که $U \vdash \Phi$ (ولی $\mathbb{N} \nvDash \Phi$).

قضیه.

برای هر نظریه ناصحیح U، یک خاصیت $F(x)$ و یک جمله کاذب Φ چنان وجود دارند که $U \vdash \Phi \leftrightarrow F(\#\Phi)$ و $\mathbb{N} \vDash F(\#\Phi)$ (همچنین $U \vdash F(\#\Phi)$)؛ ولی $\mathbb{N} \nvDash \Phi$).

اثبات.

اگر Φ جمله‌ای کاذب و اثبات‌پذیر در U باشد، قرار دهید $F(x) = (x = \#\Phi)$.

به وضوح داریم $\mathbb{N} \vDash F(\#\Phi)$ و نیز $U \vdash F(\#\Phi)$.

همینطور از $U \vdash \Phi$ نتیجه می‌شود که $U \vdash \Phi \leftrightarrow F(\#\Phi)$. □

دلیل‌مان برای نامعتبر بودنِ این استدلال (۲)

اگر نظریه صحیح نباشد (و فقط ω-سازگار باشد):

پس باید یک نظریه ω-سازگار U چنان وجود داشته باشد که ناصحیح هست.

یعنی جمله کاذب Φ چنان وجود دارد که $U \vdash \Phi$ (ولی $\mathbb{N} \nvDash \Phi$).

قضیه.

برای هر نظریه ناصحیح U، یک خاصیت $F(x)$ و یک جمله کاذب Φ چنان وجود دارند که $U \vdash \Phi \leftrightarrow F(\#\Phi)$ و $\mathbb{N} \vDash F(\#\Phi)$ (همچنین $U \vdash F(\#\Phi)$؛ ولی $\mathbb{N} \nvDash \Phi$).

اثبات.

اگر Φ جمله‌ای کاذب و اثبات‌پذیر در U باشد، قرار دهید $F(x) = (x = \#\Phi)$.
به وضوح داریم $\mathbb{N} \vDash F(\#\Phi)$ و نیز $U \vdash F(\#\Phi)$.
همینطور از $U \vdash \Phi$ نتیجه می‌شود که $U \vdash \Phi \leftrightarrow F(\#\Phi)$. $\square$

دلیل‌مان برای نامعتبر بودنِ این استدلال (۳)

اگر نظریه صحیح نباشد (و فقط ω-سازگار باشد):

پس با قبول حرف گودل در مورد (خیلی) ضعیف(تر) بودن شرط کاملاً صوری ω-سازگاری (از صحیح بودن)، استدلالِ غیرصوری گودل نامعتبر است!

((قضیه)).

برای هر نظریه ناصحیح و ω-سازگار $U \supseteq \mathsf{PA}$، یک زیرنظریه ω-سازگار $T \supseteq U$ و یک جمله کاذب Φ چنان وجود دارند که $T \vdash \Phi \leftrightarrow \neg \mathtt{Pr}_T(\#\Phi)$.
(پس داریم $\mathbb{N} \vDash \neg \mathtt{Pr}_T(\#\Phi)$ ولی $\mathbb{N} \nvDash \Phi$).

((نتیجه)).

برای یک نظریه $T \supseteq \mathsf{PA}$، تمامی جمله‌های G دارای خاصیت $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathtt{Pr}_T(\#G)$، صادق (در $\mathbb{N}$) هستند، اگر و تنها اگر نظریه T صحیح باشد.

دلیل‌مان برای نامعتبر بودنِ این استدلال (۳)

اگر نظریه صحیح نباشد (و فقط ω-سازگار باشد):

پس با قبول حرف گودل در مورد (خیلی) ضعیف(تر) بودن شرط کاملاً صوری ω-سازگاری (از صحیح بودن)، استدلالِ غیرصوری گودل نامعتبر است!

((قضیه)).

برای هر نظریه ناصحیح و ω-سازگار $U \supseteq \mathsf{PA}$، یک زیرنظریه ω-سازگار $T \subseteq U$ و یک جمله کاذب Φ چنان وجود دارند که $T \vdash \Phi \leftrightarrow \neg\mathtt{Pr}_T(\#\Phi)$.
(پس داریم $\mathbb{N} \vDash \neg\mathtt{Pr}_T(\#\Phi)$ ولی $\mathbb{N} \nvDash \Phi$).

((نتیجه)).

برای یک نظریه $T \supseteq \mathsf{PA}$، تمامی جمله‌های G دارای خاصیت $T \vdash G \leftrightarrow \neg\mathtt{Pr}_T(\#G)$، صادق (در $\mathbb{N}$) هستند، اگر و تنها اگر نظریه T صحیح باشد.

دلیل‌مان برای نامعتبر بودنِ این استدلال (۳)

اگر نظریه صحیح نباشد (و فقط ω-سازگار باشد):

پس با قبول حرف گودل در مورد (خیلی) ضعیف(تر) بودن شرط کاملاً صوری ω-سازگاری (از صحیح بودن)، استدلالِ غیرصوری گودل نامعتبر است!

((قضیه)).

برای هر نظریه ناصحیح و ω-سازگار $U \supseteq \mathsf{PA}$، یک زیرنظریه ω-سازگار $T \subseteq U$ و یک جمله کاذب Φ چنان وجود دارند که $T \vdash \Phi \leftrightarrow \neg\mathtt{Pr}_T(\#\Phi)$.
(پس داریم $\mathbb{N} \vDash \neg\mathtt{Pr}_T(\#\Phi)$ ولی $\mathbb{N} \nvDash \Phi$).

((نتیجه)).

برای یک نظریه $T \supseteq \mathsf{PA}$، تمامی جمله‌های G دارای خاصیت $T \vdash G \leftrightarrow \neg\mathtt{Pr}_T(\#G)$ صادق (در $\mathbb{N}$) هستند، اگر و تنها اگر نظریه T صحیح باشد.

خوانش‌های دیگری از استدلالِ گودل

$$\text{(I)}\,\frac{\mathbb{N}\vDash A\leftrightarrow F(\#A),\quad \mathbb{N}\vDash F(\#A)}{\mathbb{N}\vDash A}\qquad \text{(II)}\,\frac{\mathbb{N}\vDash A\leftrightarrow F(\#A),\quad \mathbb{N}\vDash F(\#A)}{T\vdash A}$$

$$\text{(III)}\,\frac{\mathbb{N}\vDash A\leftrightarrow F(\#A),\quad T\vdash F(\#A)}{\mathbb{N}\vDash A}\qquad \text{(IV)}\,\frac{\mathbb{N}\vDash A\leftrightarrow F(\#A),\quad T\vdash F(\#A)}{T\vdash A}$$

$$\text{(V)}\,\frac{T\vdash A\leftrightarrow F(\#A),\quad \mathbb{N}\vDash F(\#A)}{\mathbb{N}\vDash A}\qquad \text{(VI)}\,\frac{T\vdash A\leftrightarrow F(\#A),\quad \mathbb{N}\vDash F(\#A)}{T\vdash A}$$

$$\text{(VII)}\,\frac{T\vdash A\leftrightarrow F(\#A),\quad T\vdash F(\#A)}{\mathbb{N}\vDash A}\qquad \text{(VIII)}\,\frac{T\vdash A\leftrightarrow F(\#A),\quad T\vdash F(\#A)}{T\vdash A}$$

Of these, (I) and (VIII) are of course valid because of the truth-condition of the material conditional and Modus Ponens, respectively. For all other cases, we will present triples (A, F, T) which invalidate them.

آیا نسبت به گودل بی‌انصافی کرده‌ایم؟

گودل (کمی) حق داشته است (۱):

Σ یک رده خاص از فرمول‌ها است.

مثلاً $\forall x \exists y (x = 2y + u \vee x = 2y + v)$ یک Σ-فرمول نیست،

ولی $\exists x, y, z (x \cdot y \cdot z \neq 0 \wedge x^2 + y^2 = z^2)$ یک Σ-جمله هست.

حقیقت.

PA نظریه‌ای Σ-کامل است: هر Σ-جمله صادق را ثابت می‌کند.

حقیقت.

هر نظریه ω-سازگار، Σ-صحیح است: هر Σ-جمله‌ای که ثابت می‌کند صادق است.

پس، هر نظریه ω-سازگار $T \supseteq \mathsf{PA}$ هم Σ-صحیح است و هم Σ-کامل.

حقیقت.

نقیض جملهٔی گودل، یک Σ-جمله است.

آیا نسبت به گودل بی‌انصافی کرده‌ایم؟

گودل (کمی) حق داشته است (۱):

Σ یک رده خاص از فرمول‌ها است.

مثلاً $\forall x \exists y\, (x = 2y + u \vee x = 2y + v)$ یک Σ-فرمول نیست،

ولی $\exists x, y, z\, (x \cdot y \cdot z \neq 0 \wedge x^2 + y^2 = z^2)$ یک Σ-جمله هست.

حقیقت.

PA نظریه‌ای Σ-کامل است: هر Σ-جمله صادق را ثابت می‌کند.

حقیقت.

هر نظریه ω-سازگار، Σ-صحیح است: هر Σ-جمله‌ای که ثابت می‌کند صادق است.

پس، هر نظریه ω-سازگار $T \supseteq \mathsf{PA}$ هم Σ-صحیح است و هم Σ-کامل.

حقیقت.

نقیض جمله‌ی گودل، یک Σ-جمله است.

آیا نسبت به گودل بی‌انصافی کرده‌ایم؟

گودل (کمی) حق داشته است (۱):

Σ یک رده خاص از فرمول‌ها است.

مثلاً $\forall x \exists y \left(x = 2y + u \vee x = 2y + v\right)$ یک Σ-فرمول نیست،

ولی $\exists x, y, z \left(x \cdot y \cdot z \neq 0 \wedge x^2 + y^2 = z^2\right)$ یک Σ-جمله هست.

حقیقت.

PA نظریه‌ای Σ-کامل است: هر Σ-جمله صادق را ثابت می‌کند.

حقیقت.

هر نظریه ω-سازگار، Σ-صحیح است: هر Σ-جمله‌ای که ثابت می‌کند صادق است.

پس، هر نظریه ω-سازگار $T \supseteq \mathsf{PA}$ هم Σ-صحیح است و هم Σ-کامل.

حقیقت.

نقیض جمله‌ی گودل، یک Σ-جمله است.

آیا نسبت به گودل بی‌انصافی کرده‌ایم؟

گودل (کمی) حق داشته است (۱):

Σ یک رده خاص از فرمول‌ها است.

مثلاً $\forall x \exists y \big(x=2y+u \vee x=2y+v\big)$ یک Σ–فرمول نیست،

ولی $\exists x, y, z \big(x\cdot y\cdot z \neq 0 \wedge x^2+y^2=z^2\big)$ یک Σ–جمله هست.

حقیقت.

PA نظریه‌ای Σ–کامل است: هر Σ–جمله صادق را ثابت می‌کند.

حقیقت.

هر نظریه ω–سازگار، Σ–صحیح است: هر Σ–جمله‌ای که ثابت می‌کند صادق است.

پس، هر نظریه ω–سازگار $T \supseteq$ PA هم Σ–صحیح است و هم Σ–کامل.

حقیقت.

نقیض جمله‌ی گودل، یک Σ–جمله است.

آیا نسبت به گودل بیانصافی کردهایم؟

گودل (کمی) حق داشته است (۱):

Σ یک رده خاص از فرمولها است.

مثلاً $\forall x \exists y \big(x=2y+u \vee x=2y+v\big)$ یک Σ-فرمول نیست،

ولی $\exists x, y, z \big(x \cdot y \cdot z \neq 0 \wedge x^2+y^2=z^2\big)$ یک Σ-جمله هست.

حقیقت.

PA نظریهای Σ-کامل است: هر Σ-جمله صادق را ثابت میکند.

حقیقت.

هر نظریه ω-سازگار، Σ-صحیح است: هر Σ-جملهای که ثابت میکند صادق است.

پس، هر نظریه ω-سازگار $T \supseteq$ PA هم Σ-صحیح است و هم Σ-کامل.

حقیقت.

نقیض جملهی گودل، یک Σ-جمله است.

آیا بازنویسی‌مان زیاده‌ازحد انتزاعی بوده است؟

گودل (کمی) حق داشته است (۲):

گزاره.

اگر $\mathsf{PA} \subseteq T$ یک نظریه ω-سازگار بوده و $\neg A$ یک Σ-جمله و $\neg F(x)$ یک Σ-فرمول باشد، آنگاه استدلالِ گودل معتبر است: $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$ و $\mathbb{N} \models F(\#A)$ نتیجه می‌دهند که $\mathbb{N} \models A$.

اثبات.

اگر $\mathbb{N} \not\models A$، آنگاه $\neg A$ یک Σ-جملهٔ صادق است. پس $\mathsf{PA} \vdash \neg A$، که نتیجه می‌دهد $T \vdash \neg F(\#A)$. حال از Σ-صحیح بودن T (که حاصل ω-سازگاری T است) نتیجه می‌شود که $\mathbb{N} \models \neg F(\#A)$؛ و این یک تناقض با مفروضات ما است! □

آیا بازنویسی‌مان زیاده‌ازحد انتزاعی بوده است؟
گودل (کمی) حق داشته است (۲):

گزاره.

اگر $T \supseteq \mathsf{PA}$ یک نظریه ω-سازگار بوده و $\neg A$ یک Σ-جمله و $\neg F(x)$ یک Σ-فرمول باشد، آنگاه استدلالِ گودل معتبر است: $T \vdash A \leftrightarrow F(\#A)$ و $\mathbb{N} \vDash F(\#A)$ نتیجه می‌دهند که $\mathbb{N} \vDash A$.

اثبات.

اگر $\mathbb{N} \nvDash A$، آنگاه $\neg A$ یک Σ-جملەی صادق است. پس $\mathsf{PA} \vdash \neg A$، که نتیجه می‌دهد $T \vdash \neg F(\#A)$. حال از Σ-صحیح بودن T (که حاصل ω-سازگاری T است) نتیجه می‌شود که $\mathbb{N} \vDash \neg F(\#A)$؛ و این یک تناقض با مفروضات ما است! $\square$

آیا، بالاخره، جملهی گودل صادق است؟

مقاله آیزاکسون ۱

Chapter 7
Necessary and Sufficient Conditions for Undecidability of the Gödel Sentence and its Truth

Daniel Isaacson

D. Isaacson (✉)
University Lecturer in Philosophy of Mathematics; Fellow of Wolfson College, Oxford University, Oxford, UK
e-mail: daniel.isaacson@philosophy.ox.ac.uk

D. DeVidi et al. (eds.), *Logic, Mathematics, Philosophy: Vintage Enthusiasms*, 135
The Western Ontario Series in Philosophy of Science 75,
DOI 10.1007/978-94-007-0214-1_7,

آیا، بالاخره، جملهٔی گودل صادق است؟
مقاله آیزاکسون ۲

Corollary 18 *If S is Σ_0-complete and ω-consistent, then S is Σ_1-sound.*

Proof Let $\exists v_1 H(v_1)$ be a Σ_1-sentence such that $S \vdash \exists v_1 H(v_1)$. Then $S \vdash \exists v_1 \forall v_2 (v_2 = v_2 \supset H(v_1))$. By Theorem 17, $\exists v_1 \forall v_2 (v_2 = v_2 \supset H(v_1))$ is true. So $\exists v_1 H(v_1)$ is true. ■

Proposition 19 (Kreisel 1955) *There is an ω-consistent system that proves a false Σ_3-sentence.*

Proof Let $P(v_1)$ be a formula that expresses $\{n : \mathrm{PA} \vdash E_n\}$. Let

$$H(x) =_{\mathrm{df}} \exists y (P(\ulcorner E_x \supset \exists v_1 E_y \urcorner) \wedge \forall z P(\ulcorner E_x \supset \sim E_y[z] \urcorner)).$$

From the arithmetization of the syntax of PA, $H(x)$ can be written out as a formula in the language of PA.

Let K be a diagonal sentence for $H(x)$, i.e., s.t. that $(K \equiv H(\overline{\ulcorner K \urcorner}))$. So K is true if and only if K when added to PA proves an ω-inconsistency. We show that $\mathrm{PA} \cup \{K\}$ is ω-consistent, as follows.

Suppose that $\mathrm{PA} \cup \{K\}$ were ω-inconsistent. Then K would be true, i.e., when added to PA it results in an ω-inconsistent system. But also since PA is sound with respect to truth, $\mathrm{PA} \cup \{K\}$ would be sound with respect to truth. But any theory

آیا، بالاخره، جملهٔ گودل صادق است؟

مقاله آیزاکسون ۳

Theorem 22 *The addition of a true Π_1-formula A to a system S that is Σ_0-complete preserves ω-consistency.*

Proof (letter from Georg Kreisel 4 April 2005) . Suppose $S \cup \{A\}$ is ω-inconsistent, i.e., there is a formula $\exists x B(x)$ such that:

$$S \vdash (A \supset \exists x B(x)) \tag{7.10}$$

$$\text{and } S \vdash (A \supset\sim B(\overline{n})) \text{ for each } n \in \omega \tag{7.11}$$

A is of the form $\forall x A_0(x)$ where $A_0(x)$ is Σ_0 (quantifier-free). So

$$S \vdash (\exists x \sim A_0(x) \vee \exists x B(x)) \tag{7.12}$$

$$S \vdash (A \supset (A \wedge \exists x B(x)) \text{ (7.10) and prop. logic} \tag{7.13}$$

$$S \vdash (\exists x \sim A_0(x) \vee (A \wedge \exists x B(x))) \text{ (7.13) and prop/pred logic} \tag{7.14}$$

$$S \vdash \exists x(\sim A_0(x) \vee (A \wedge B(x))) \text{ (7.14) and pred. logic} \tag{7.15}$$

$$S \vdash A_0(\overline{n}) \text{ for each } n \in \omega \text{, since } \forall x A_0(x) \text{ is true and } S \text{ is } \Sigma_0\text{-complete} \tag{7.16}$$

$$S \vdash (A_0(n) \wedge (A \supset\sim B(\overline{n})) \text{ for each } n\text{, due to (7.11) and (7.16) and logic in } S \tag{7.17}$$

$$S \vdash\sim (\sim A_0(\overline{n}) \vee (A \wedge B(\overline{n}))) \text{ for each } n \text{ by (7.26) and prop. logic} \tag{7.18}$$

آیا، بالاخره، جملهی گودل صادق است؟

(1990) On "Seeing" the Truth of the Gödel Sentence; Boolos, G.

(1998) Induction and Indefinite Extensibility: the Gödel Sentence Is True, But Did Someone Change the Subject?; Shapiro, S. *Mind* 427:597–624.

(1999) Can a Turing Machine Know That the Gödel Sentence Is True?; M

(2001) On "Seeing" the Truth of the Gödel Sentence; McCall, S.

(2001) On Turing Machines Knowing Their Own Gödel–Sentences; Tennant

(2007) On Gödel Sentences and What They Say; Milne, P.

(2011) How Do We Know That the Gödel Sentence of a Consistent Theory Is True?; Serény, G. *Philosophia Mathematica* 19:47–73.

(2012) How Do We Know That G Is True?; Drăghichi, V.

(2013) Is G True By Gödel's Theorem?; Drăghichi, V.

(2015) A Deflationary Account of the Truth of the Gödel Sentence G; 2authos

(2018) Some Remarks on True Undecidable Sentences; Moriconi, E.

آیا تعریفِ رایجِ «جمله‌ی گودل» تعریفِ مناسبی است؟

چرا یک نظریه ω-سازگار $\mathsf{PA} \subseteq T$، «جمله‌ی گودل» دارد؟ و نه «جمله‌های گودل»؟

Why *"the Gödel sentence"*, and **not** *"a Gödel sentence"*?

احتمالاً به خاطر اینکه:

برای هر نظریه ω-سازگار $\mathsf{PA} \subseteq T$ و هر جمله G, G' داریم:
اگر $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\#G)$ و $T \vdash G' \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\#G')$، آنگاه $T \vdash G \leftrightarrow G'$.

ولی

نکته.

برای هر نظریه ناصحیح $\mathsf{PA} \subseteq U$، می‌توان جمله‌های G و H را چنان ساخت که $U \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\#G)$ و $U \vdash H \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\#H)$ برقرار باشند، اما $\mathbb{N} \nvDash G \leftrightarrow H$ (با اینکه $U \vdash G \leftrightarrow H$).

پس برای نظریه‌های ناصحیح، نمی‌توان فقط از یک جمله‌ی گودل سخن راند!

آیا تعریفِ رایجِ «جملهٔی گودل» تعریفِ مناسبی است؟

چرا یک نظریه ω–سازگار $T \supseteq \mathsf{PA}$، «جملهٔی گودل» دارد؟ و نه «جمله‌های گودل»؟

Why *“the Gödel sentence”*, and **not** *“a Gödel sentence”* ?

احتمالاً به خاطر اینکه:

برای هر نظریه ω–سازگار $T \supseteq \mathsf{PA}$ و هر جمله G, G' داریم:
اگر $T \vdash G \leftrightarrow \neg\mathtt{Pr}_T(\#G)$ و $T \vdash G' \leftrightarrow \neg\mathtt{Pr}_T(\#G')$، آنگاه $T \vdash G \leftrightarrow G'$.

ولی

نکته.

برای هر نظریه ناصحیح $U \supseteq \mathsf{PA}$، می‌توان جمله‌های G و H را چنان ساخت که
$U \vdash G \leftrightarrow \neg\mathtt{Pr}_T(\#G)$ و $U \vdash H \leftrightarrow \neg\mathtt{Pr}_T(\#H)$ برقرار باشند، اما
$\mathbb{N} \nvDash G \leftrightarrow H$ (یا اینکه $U \vdash G \leftrightarrow H$).

پس برای نظریه‌های ناصحیح، نمی‌توان فقط از یک جملهٔی گودل سخن راند!

آیا تعریفِ رایجِ «جمله‌ی گودل» تعریفِ مناسبی است؟

چرا یک نظریه ω–سازگار $T \supseteq \mathsf{PA}$، «جمله‌ی گودل» دارد؟ و نه «جمله‌های گودل»؟

Why *"the Gödel sentence"*, and **not** *"a Gödel sentence"*?

احتمالاً به خاطر اینکه:

برای هر نظریه ω–سازگار $T \supseteq \mathsf{PA}$ و هر جمله G, G' داریم:
اگر $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathtt{Pr}_T(\#G)$ و $T \vdash G' \leftrightarrow \neg \mathtt{Pr}_T(\#G')$، آنگاه $T \vdash G \leftrightarrow G'$.

ولی

نکته.

برای هر نظریه ناصحیح $U \supseteq \mathsf{PA}$، می‌توان جمله‌های G و H را چنان ساخت که
$U \vdash G \leftrightarrow \neg \mathtt{Pr}_T(\#G)$ و $U \vdash H \leftrightarrow \neg \mathtt{Pr}_T(\#H)$ برقرار باشند، اما
$\mathbb{N} \nvDash G \leftrightarrow H$ (با اینکه $U \vdash G \leftrightarrow H$).

پس برای نظریه‌های ناصحیح، نمی‌توان فقط از یک جمله‌ی گودل سخن راند!

آیا تعریفِ رایجِ «جملهٔی گودل» تعریفِ مناسبی است؟

چرا یک نظریه ω-سازگار $T \supseteq \mathsf{PA}$، «جملهٔی گودل» دارد؟ و نه «جمله‌های گودل»؟

Why *“the Gödel sentence”*, and **not** *“a Gödel sentence”* ?

احتمالاً به خاطر اینکه:

برای هر نظریه ω-سازگار $T \supseteq \mathsf{PA}$ و هر جمله G, G' داریم:
اگر $T \vdash G \leftrightarrow \neg \mathtt{Pr}_T(\#G)$ و $T \vdash G' \leftrightarrow \neg \mathtt{Pr}_T(\#G')$، آنگاه $T \vdash G \leftrightarrow G'$.

ولی

نکته.

برای هر نظریه ناصحیح $U \supseteq \mathsf{PA}$، می‌توان جمله‌های G و H را چنان ساخت که
$U \vdash G \leftrightarrow \neg \mathtt{Pr}_T(\#G)$ و $U \vdash H \leftrightarrow \neg \mathtt{Pr}_T(\#H)$ برقرار باشند، اما
$\mathbb{N} \nvDash G \leftrightarrow H$ (با اینکه $U \vdash G \leftrightarrow H$).

پس برای نظریه‌های ناصحیح، نمی‌توان فقط از یک جملهٔی گودل سخن راند!

آیا تعریفِ رایجِ «جملهٔی گودل» تعریفِ مناسبی است؟

The moral is that mere equivalence (inside the theory) to its own unprovability does not make a sentence worthy of the title "the Gödel sentence", simply because there could be *more than one* such sentences, even up to equivalence. We submit the following as an improvement upon the usual convention:

Definition 3.1. By the *Gödel sentence* of a recursively enumerable theory T we mean any sentence P satisfying the following properties:

$$\text{(i) } T \vdash P \leftrightarrow \neg\mathsf{Pr}_T(\#P) \text{ and (ii) } \mathbb{N} \vDash P \leftrightarrow \neg\mathsf{Pr}_T(\#P).$$

Theorem 3.3. *Let P be a Gödel sentence of a recursively enumerable, Σ_1-complete theory T. Then P is true if and only if T is consistent.*

سپاس

با سپاس فراوان

از شرکت‌کنندگان و شنوندگان عزیز

و برگزارکنندگان گرامی

پیش به سوی پذیرایی

سپاس

با سپاس فراوان

از شرکت‌کنندگان و شنوندگان عزیز

و برگزارکنندگان گرامی

نوشیدنی گرم (چای یا قهوه) در خدمت باشیم!

سپاس

با سپاس فراوان

از شرکت‌کنندگان و شنوندگان عزیز

و برگزارکنندگان گرامی

پذیرایی، شیرینی هم داره ها!

سپاس

با سپاس فراوان

از شرکت‌کنندگان و شنوندگان عزیز

و برگزارکنندگان گرامی

یعنی ای کاش داشته باشه ...