برنامهٔ

چهارمین همایش انجمن منطق ایران

	ساعت			سخنران	عنوان سخنرانی
	۸:۳۰	–	۹	ثبت نام	
	۹	–	۱۰	**محمد گلشنی** پژوهشگاه دانش‌های بنیادی	**افزودن تمایزناپذیرها به کمک فورسینگ با کاربرد در منطق وجهی فورسینگ**
صبح چهارشنبه ۱۳۹۵/۱۰/۸	۱۰	–	۱۰:۳۰	**پذیرایی**	
	۱۰:۳۰	–	۱۱:۱۵	**سلمان پناهی** دانشگاه ملبورن	**دو وجهی نگری، ادات منطقی، و نتیجه منطقی**
	۱۱:۱۵	–	۱۲	**زهرا غفوری** دانشگاه صنعتی شریف	**اصل استقرای باز و دنباله‌های اسپکر**
	۱۲	–	۱۴	**نماز و ناهار**	
	۱۴	–	۱۵	**فاطمه سیفان** دانشگاه ارلانگن	**منطق وجهی نقطه‌ثابت و خودران‌ها: رویکرد هم‌جبری**
	۱۵	–	۱۵:۴۵	**داود حسینی چفلی** دانشگاه تربیت مدرس	**سمنتیکی برای رواداری بر پایه‌ی نظریه‌ی بازی**
عصر چهارشنبه ۱۳۹۵/۱۰/۸	۱۵:۴۵	–	۱۶:۱۵	**پذیرایی**	
	۱۶:۱۵	–	۱۷	**محمد زرقانی علی اکبر استاجی ابوالقاسم کریمی فیض آبادی** دانشگاه حکیم سبزواری	**جنبه‌های منطق توپوقاب‌ها**
	۱۷	–	۱۷:۴۵	**پروین صفری سعید صالحی پورمهر** دانشگاه تبریز	**معناشناسی کریپکی برای منطق‌های فازی**

	۹	–	۱۰	**ضیاء موحد** موسسه پژوهشی حکمت و فلسفه ایران	**شعر و ریاضیات**
صبح پنج‌شنبه ۱۳۹۵/۱۰/۹	۱۰	–	۱۰:۳۰	**پذیرایی**	
	۱۰:۳۰	–	۱۱:۱۵	**پیام سراجی سعید صالحی پورمهر** دانشگاه تبریز	**تعمیم قضیه گودل- راسر برای نظریه‌های تعریف‌پذیر**
	۱۱:۱۵	–	۱۲	**فاطمه نبوی** دانشگاه قم	**رویکرد فعلی در منطق اصول فقه**

THE PRINCIPLE OF OPEN INDUCTION AND SPECKER SEQUENCES

MOHAMMAD ARDESHIR AND ZAHRA GHAFOURI

Department of Mathematical Sciences
Sharif University of Technology, Tehran

Abstract. The schema **ED** asserts that "there exists an intuitionistically enumerable subset of $\mathbb{N}$ which is not intuitionistically decidable". We prove that in the presence of Markov's Principle over Bishop's constructive analysis, $\neg$**ED** is equivalent to the Principle of Open Induction on $[0,1]$, via Specker sequences.

1. Introduction

The Principle of Open Induction on $[0,1]$, **OI**$([0,1])$, which is a consequence of the Principle of Bar Induction, is given by the following statement:

> Let A be an open subset of $[0,1]$. If A is progressive in $[0,1]$, then $[0,1] \subseteq A$, where a subset A of $[0,1]$ is called progressive in $[0,1]$ if
>
> $$\forall x \in [0,1](\forall y \in [0,1](y < x \to y \in A) \to x \in A).$$

Since A is progressive, $0 \in A$, and since A is an open subset of $[0,1]$, there is a rational r_0 such that $[0, r_0) \subseteq A$. Again, since A is progressive, $r_0 \in A$, and since A is an open subset of $[0,1]$, there is a rational r such that $(r_0 - r, r_0 + r) \subseteq A$. Again, since A is progressive, $r_1 := r_0 + r \in A$. We can continue this process indefinitely. The principle of open induction states that we will finally obtain the conclusion $1 \in A$.

Note that classically, we will reach a limit point, like r_ω, by the classically valid fact that a bounded monotone sequence $\langle r_n \rangle$ converges. It is easily can be shown that $r_\omega \in A$. If r_ω is the last point 1, we are done, otherwise we start again, and we reach a second limit point, like $r_{\omega \cdot 2} \in A$. If it isn't again the last point, we continue this process, ..., and one would have a series of (open) intervals having for endpoints

$$r_0, r_1, \ldots, r_\omega, \ldots, r_{\omega \cdot 2}, \ldots, r_{\omega^2}, \ldots, r_{\omega^\omega}, \ldots.$$

This is a contradiction, since the above set is uncountable. This is essentially E. Borel's proof of the compactness of a closed interval.

OI was introduced by T. Coquand in a constructive framework and then W. Veldman in [2] provided a list of important equivalent statements of **OI**$([0,1])$, and among them, we are interested in the following one:

every enumerable subset of $\mathbb{N}$ is nearly-decidable, (**ND**)

where a subset A of $\mathbb{N}$ is called nearly-decidable if and only if

$$\neg\neg\exists\alpha \in 2^{\mathbb{N}}\, \forall n\, (n \in A \leftrightarrow \alpha(n) = 1).$$

M. Ardeshir and R. Ramezanian in [1] introduced the schema **ED** which states that

> there exists an intuitionistically enumerable subset of $\mathbb{N}$ which is not intuitionistically decidable,

where a subset A of $\mathbb{N}$ is intuitionistically decidable if and only if there exists α in $2^{\mathbb{N}}$ such that, for every n, $n \in A$ if and only if $\alpha(n) = 1$, i.e.

$$\exists\alpha \in 2^{\mathbb{N}}\ \forall n\ (n \in A \leftrightarrow \alpha(n) = 1),$$

and a subset A of $\mathbb{N}$ is intuitionistically enumerable if and only if there exists β in $(\mathbb{N} \cup \{\perp\})^{\mathbb{N}}$ such that for every n, $n \in A$ if and only if $\exists k(\beta(k) = n)$, i.e.

$$\exists\beta \in (\mathbb{N} \cup \{\perp\})^{\mathbb{N}}\ \forall n\ (n \in A \leftrightarrow \exists k(\beta(k) = n)).$$

It is proved that **ED** is consistent with some certain well-known axioms of intuitionistic analysis, like the Weak Continuity Principle, the Principle of Bar Induction, the Choice Schema, and the Kripke Schema. It is also shown that **ED** is equivalent to the existence of a *Specker sequence*, a bounded monotone sequence of real numbers without a limit. As is known, Church's Thesis permits the existence of a Specker sequence and then implies **ED**.

2. The main result

Veldman proved that, in the presence of Markov's Principle, **ND** is equivalent to **OI**$[0, 1]$, via the Principle of Induction on Enumerable Bars in Baire space $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ and another principle called **EnDec**?!, stating that:

> Every enumerable subset A of $\mathbb{N}$ with the property that every decidable and proper subset of $\mathbb{N}$ that is a subset of A is a proper subset of A, coincides with $\mathbb{N}$.

One can show that $\neg$**ED** is equivalent to **ND**. We prove that $\neg$**ED** is equivalent to the Principle of Open Induction on $[0, 1]$ via the concept of Specker sequences, in the presence of Markov's Principle:

$$\forall x(A(x) \vee \neg A(x)) \wedge \neg\neg\exists x\, A(x) \to \exists x\, A(x).$$

It also provides an easy access to the topic of open induction, a topic which is gaining attention recently, via relating open induction with Specker sequences.

Our work may be considered as a research on constructive reverse mathematics based on Bishop's constructive mathematics.

References

[1] M. Ardeshir and R. Ramezanian. Decidability and Specker sequences in intuitionistic mathematics. *MLQ Math. Log. Q.* 55 (6), 637-648 (2009).

[2] W. Veldman. The Principle of Open Induction on Cantor space and the Approximate-Fan Theorem. *arXiv:1408.2493v1* (2014).

ADDING INDISCERNIBLES BY FORCING WITH AN APPLICATION TO THE MODAL LOGIC OF FORCING

MOHAMMAD GOLSHANI

The modal logic of forcing was introduced by Hamkins and Löwe [3], in which the modal operators $\Diamond$ and $\Box$ are interpreted as

$$\Diamond\phi \iff \phi \text{ holds in some set generic extension of the universe}$$

and

$$\Box\phi \iff \phi \text{ holds in all set generic extensions of the universe.}$$

In [3], it is shown that the modal logic of forcing is exactly $S4.2$. One of the key points in their proof is the existence of buttons and switches.

Given a class of forcing notions, Γ, we can define the modal logic of the class Γ in the same way, by restricting the forcing notions to elements of Γ. In [4], among many other things, it is proved that the modal logic of collapse forcing is $S4.3$.

Hamkins and Löwe have asked, in connection with results in [3], whether there can be a model N of ZFC such that $N \equiv N[H]$ whenever H is the generic collapse of any cardinal onto ω. This question appeared later in Hamkinss paper [2], as question 10. The existence of such a model has strange impacts on the modal logic of collapse forcings. So a model of set theory as N above would be an extreme counterexample in having no switches at all for the class of collapse forcing, and would have valid principles of collapse forcing that are beyond S5, a hard upper bound for the other natural classes of forcing.

In this talk, I will review the above mentioned work of Hamkins and Löwe and then, I'll sketch a solution to the Hamkins-Löwe's question. The proof uses large cardinals and is based on adding a closed unbounded class of indiscernibles using forcing.

This is joint work with William Mitchell [1].

References

[1] Golshani, Mohammad; Mitchell, William, On a question of Hamkins and Löwe on the modal logic of collapse forcing, submitted.

[2] Hamkins, Joel David; Somme second order set theory. Logic and its applications, 36-50, Lecture Notes in Comput. Sci., 5378, Springer, Berlin, 2009.

[3] Hamkins, Joel David; Löwe, Benedikt, The modal logic of forcing. Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), no. 4, 1793-1817.

[4] Hamkins, Joel David; Leibman, George; Löwe, Benedikt, Structural connections between a forcing class and its modal logic. Israel J. Math. 207 (2015), no. 2, 617651.

School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), P.O. Box: 19395-5746, Tehran-Iran.

E-mail address: golshani.m@gmail.com

ابهام، سمنتیکی بر پایه‌ی نظریه‌ی بازی برای رواداری

داود حسینی

دانشگاه تربیت مدر س تهران

پژوهشگاه دانش‌های بنیادی

davood.hosseini@modares.ac.ir

۰. مقدمه: مساله‌ی رواداری

هر فردی که تنها یک سانتی‌متر از کسی که قدبلند است کوتاه‌تر باشد، قدبلند است (اصل رواداری)؛ فردی با قد دو متر قدبلند است؛ اما فردی با قد یک متر قدبلند نیست. *شهوداً* این سه جمله با هم *سازگارند*. مساله این است که چگونه؟ چراکه به‌سادگی می‌توان دید که این سه جمله در *منطق کلاسیک* با هم *ناسازگارند*. پارادوکس خرمن نشان‌دهنده‌ی همین مدعاست:

فردی با قد دو متر قدبلند است.

هر فردی که تنها یک سانتی‌متر از کسی که قدبلند است کوتاه‌تر باشد، قدبلند است.

∴ فردی با قد یک متر قدبلند است.

نظریه‌های ابهام را در مواجهه با مساله‌ی رواداری می‌توان در دو دسته جای داد. نظریه‌های غالب (Dominant Theories)، که شامل اکثر نظریه‌های ابهام می‌شوند، مدعی‌اند که در مساله‌ی رواداری حق با منطق کلاسیک است. نظریه‌های عامیانه (Naïve Theories)، که برخی از متاخرین طرح کرده‌اند، بر این باورند که در مساله‌ی رواداری حق با شهودهای ماست. از این میان می‌توان این افراد را نام برد: Zardini (2008) Priest (2010) Weber (2010) Cobreros, et. al. (2012).

برای ادامه‌ی بحث در باب مساله‌ی رواداری ابتدا چند اصطلاح را تعریف می‌کنیم.

رواداری (Tolerance): محمول F نسبت به رابطه‌ی R روادار است هرگاه اگر aRb و Fa آنگاه Fb.

زنجیره‌ی خرمنی (Soritical chain): زنجیری $a_1, \ldots, a_n$ زنجیره‌ی خرمنی محمول F است هرگاه برای حداقل یک رابطه‌ی R که F نسبت به آن روادار است $i=1, \ldots, n-1$ a_iRa_{i+1}.

مورد مثبت و مورد منفی (Positive case, Negative case): a مورد مثبت محمول F است هرگاه این‌گونه باشد که Fa و مورد منفی محمول F است هرگاه این‌گونه باشد که ~Fa.

مرز دقیق (Cut-off): زنجیره‌ی خرمنی $a_1, \ldots, a_n$ مرز دقیق دارد هرگاه iای باشد که Fa_i اما این‌گونه نباشد که Fa_{i+1}.

مبهم (Vague): محمول F مبهم است هرگاه زنجیره‌های خرمنی‌اش مرز دقیق نداشته باشند.

مساله‌ی رواداری را اکنون می‌توان این‌گونه بازنویسی کرد: ***چگونه رواداری و وجود موارد مثبت و منفی با هم سازگارند؟***

۱. نظریه‌های غالب در برابر مساله‌ی رواداری

طبیعتا برای حل مساله‌ی رواداری باید منطقی برای زبان پیشنهاد شود که در آن استدلال پارادوکس خرمن معتبر نباشد. پیشنهاد همه‌ی نظریه‌های عامیانه منطقی نامتعدی است؛ منطقی که رابطه‌ی نتیجه‌شدن منطقی آن ویژگی تعدی نداشته باشد. یعنی این قاعده‌ی سمنتیکی برقرار نباشد:

$$\frac{A1, \ldots, An \vDash C \qquad\qquad B1, \ldots, Bm, C \vDash D}{A1, \ldots, An, B1, \ldots, Bm \vDash D}$$

متناظراً در نظریه‌ی اثبات قاعده‌ی برش (Cut-Rule) مجاز نباشد:

$$\frac{A1, \ldots, An \vdash C \qquad\qquad B1, \ldots, Bm, C \vdash D}{A1, \ldots, An, B1, \ldots, Bm \vdash D}$$

با فرض چنین منطقی مساله‌ی رواداری حل می‌شود. بدین صورت که استدلال پارادوکس خرمن – تنها مشکل بر سر راه سازگاری رواداری – دیگر معتبر نخواهد بود. به عبارتی گرچه

$$Fa_1, \forall i\ (Fa_i \rightarrow F_{ai+1}) \vDash Fa_2$$

$$Fa_2, \forall i\ (Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}) \vDash Fa_3$$

اما:

$$Fa_1, \forall i\ (Fa_i \rightarrow Fa_{i+1}) \nvDash Fa_2$$

بنابراین استدلال پارادوکس در گام دوم متوقف می‌شود.

نتیجه‌ی چنین منطقی تعهد به سطوح ادعا (Levels of assertion) خواهد بود. بدین معنا که حداقل در برخی موارد در اثر استنتاج منطقی قوت ادعا کم می‌شود.

ادعای قوی (Strong assertion): مجاز است که بر پایه‌ی آن استنتاج منطقی کرد و نتیجه را نیز ادعا کرد. نظیر Fa_1 و $\forall i\ (Fa_i \rightarrow Fa_{i+1})$ در بالا.

ادعای ضعیف (Weak assertion): مجاز نیست که بر پایه‌ی آن استنتاج منطقی کرد و نتیجه را نیز ادعا کرد. نظیر Fa_2 در بالا.

عموم صاحبان نظریه‌های عامیه معتقدند که سطوح ادعا پایه‌های شهوی دارند. بحث در این باره از حوزه این مقاله خارج است؛ چراکه در اینجا قصد نداریم از نظریه‌های عامیانه دفاع کنیم. بلکه قصد داریم از نسخه‌ای از نظریه‌ی عامیانه در مقابل بقیه دفاع کنیم.

به مساله‌ی منطق رواداری برمی‌گردیم. تاکنون دانستیم که چنین منطقی طبیعتاً نامتعدی است. اما سمنتیک و سیستم استنتاجی مناسب چیست؟ استراتژی همه‌ی صاحبان نظریه‌های غالب (غیر از من، چنانکه در ادامه روشن می‌شود) سمنتیکی چندارزشی از سنخ سمنتیک تارسکی است. مفاهیم اصلی در این گونه سمنتیک‌ها صدق، ارجاع، دامنه و ارضاء است. و به ازای هر محمول افرازی از دامنه‌ی تعبیر خواهیم داشت که تعداد مجموعه‌های افراز به تعداد ارزش‌های صدق هستند.

استدلال خواهم کرد که چنین سمنتیک‌هایی موفق به حل مساله‌ی رواداری نمی‌شوند. استدلال، بازسازی یک اشکال معروف در ادبیات ابهام است: اشکال مرز دقیق (Sharp-Boundary Objection).

فرض کنیم دامنه‌ی تعبیر شامل زنجیره‌ی خرمنی محمول F است و موارد مثبت و منفی برای F وجود دارند.

۱. در هر تعبیر F دامنه تعبیر را به تعدادی مجموعه‌ی کلاسیک افراز می‌کند.

۲. نتیجه‌ی ۱: زنجیره‌ی خرمنی F مرز دقیق دارد.

۳. اگر F روادار باشد، زنجیره‌ی خرمنی F مرز دقیق ندارد.

٤. نتیجه‌ی ۲و۳: F روادار نیست.

نتیجه اینکه در هیچ مدلی شامل موارد مثبت و منفی، رواداری ارضاء نمی‌شود. پس سه جمله‌ی ابتدای بحث ناسازگارند. یعنی این سه جمله: هر فردی که تنها یک سانتی‌متر از کسی که قدبلند است کوتاه‌تر باشد، قدبلند است؛ فردی با قد دو متر قدبلند است؛ اما فردی با قد یک متر قدبلند نیست.

تا اینجا استدلال کردم که هیچ‌یک از نظریه‌های عامیانه‌ی موجود نمی‌توانند مساله‌ی رواداری را حل کنند. اما، آیا می‌توان راه‌حلی برای این مساله داشت؟ در ادامه سعی می‌کنم سمنتیکی ارائه کنم که بتواند مساله را حل کند.

۲. سمنتیک بر پایه‌ی نظریه‌ی بازی برای رواداری

در ادبیات بحث، حداقل سه گونه سمنتیک وجود دارد: سمنتیک بر پایه‌ی نظریه‌ی مدل؛ مفاهیم اساسی برای این گونه سمنتیک ارضاء و صدق اند. سمنتیک بر پایه‌ی نظری‌ی اثبات؛ مفاهیم بنیادین این سمنتیک سازگاری و قاعده‌ی استنتاج است. سمنتیک بر پایه‌ی نظریه‌ی بازی؛ مفاهیم اصلی آن بازی و استراتژی برد است. سمنتیک‌های بر پایه‌ی نظریه‌ی مدل و اثبات تاریخ آشنایی دارند. اما سمنتیک بر پایه‌ی نظریه‌ی بازی دو تاریخ متفاوت دارد: یکی سنتی در ریاضیات ساختنی که

برمی‌گردد به کارهای Lorenzen (1958) و Lorenzen & Lorenz (1978)؛ در این سنت نام‌های متفاوتی بر این سمنتیک گذاشته شده نظیر Dialogical Logic, Dialogical Semantics, Game Semantics. دیگر سنتی در نظریه‌ی کاربردی معنا که حاصل کارهایی نظیر Hintikka (1973) است. هینتیکا نام Game-Theoretic Semantics را بر این سمنتیک نهاد. آنچه در این مقاله پیشنهاد می‌شود سمنتیکی برای رواداری در ادامه‌ی سنت نخست است.

ماریون در تعدادی مقاله سعی دارد نشان دهد چگونه سمنتیک بر پایه‌ی نظریه‌بازی می‌تواند هم‌خوان با نظریه‌ی معنایی برای یک زبان باشد (Marion (2009, 2010, 2012؛ نظریه‌ی معنایی که مبتنی باشد بر شرایط ادعا (Assertion-Condition) و نه شرایط صدق (Truth-Condition). برای این منظور وی خوانشی از سمنتیک بر پایه‌ی نظریه‌ی بازی داده که مرتبط است با نظریه‌ی براندم در باب ادعا.

> با یک ادعا، شخص نه‌تنها ادعاهای بیشتری را مجاز می‌کند، بلکه خود را متعهد می‌کند که ادعای اصلی را نیز تبرئه کند؛ بدین معنا که نشان دهد محق در آن ادعا بوده است. ... عدم موفقیت در دفاع از محق بودن، ادعا را خالی از محتوا می‌کند. (Brandom, 1983, p. 641)

براندم (1983, 1984, 2008) مکرر از ادعا به مثابه حرکتی (move) در یک بازی (game) یاد کرده است. تعابیر معمول براندم از این قرارند: بازی ادعا (assertion game) و بازی ارائه و درخواست دلیل (game of giving and asking for reasons). پیشنهاد ماریون این است که می‌توان این عبارات را تعبیر لغوی (و نه استعاری) کرد و گفت: «ادعا کردن حرکتی در یک بازی است که در آن شخص مسئول است که دلایلی برای توجیه ادعای خود بیاورد». با احتساب این «می‌توان نظریه‌ی ادعای براندم را پایه‌ی مفهومی‌ای برای سمنتیک بر پایه‌ی نظریه‌ی بازی دانست، هم‌چنان‌که می‌توان این سمنتیک را تدقیق منطقی آن نظریه تلقی کرد» (2009, pp.20-21).

با این مقدمه سمنتیک ماریون–براندم بر پایه‌ی نظریه‌ی بازی را معرفی می‌کنیم. در این سمنتیک در ازای هر جمله زبان (در اینجا زبان را مرتبه‌ی اول با همانی در نظر می‌گیریم) بازی دونفره‌ای بین O (Opponent) و P (Proponent) با حرکات یکی‌درمیان درمی‌گیرد. حرکت نخست با P است: ادعایی می‌کند و در طول بازی باید از آن دفاع کند. این بازی دو دسته قاعده دارد: قواعد جزئی (Particular Rule) که حاکم بر کاربرد عملگرهاست و قواعد استراتژیک (Strategic Rule) که حاکم بر برد و باخت است. تنها برخی از این قواعد را که برای هدف مقاله کافی هستند معرفی می‌کنیم.

برخی قواعد جزئی:

قاعده‌ی عطف: P ادعا می‌کند A&B؛ O یکی از دو مولفه را انتخاب می‌کند و P باید از آن دفاع کند.

قاعده‌ی شرط: P ادعا می‌کند $A \rightarrow B$؛ O ادعا می‌کند که A تا P را مجبور به ادعای B و دفاع از آن کند.

برخی قواعد استراتژیک:

قاعده‌ی برد: هر بازی در یک گام متناهی پایان می‌یابد و دقیقا یکی از دو بازیکن می‌برد. بازیکنی برنده است که در گام نهایی نوبت طرف مقابل باشد اما طرف مقابل نتواند هیچ حرکتی انجام دهد.

در این سمنتیک اعتبار چنین تعریف می‌شود: فرمول A معتبر است هرگاه P برای بازی A استراتژی برد داشته باشد.

تا اینجا در این بخش گفتیم که یک سمنتیک بر پایه‌ی نظریه‌ی بازی چگونه چیزی است. حال قصد داریم سمنتیکی برای رواداری از این نوع ارائه کنیم. تنها کافی است به سمنتیک پیشین (چه کلاسیک چه ...) این قاعده استراتژیک را بیفزاییم:

قاعده‌ی سطوح ادعا: هر حرکت بازی (ادعا) یک پیشوند دارد. پیشوند در ابتدای بازی ۱ است. هرگاه P جمله‌ای شرطی ادعا کند و O مقدم را ادعا کند، پیشوند ادعای تالی یک واحد افزایش می‌یابد. پیشوند نمی‌تواند بیشتر از ۲ شود.

(k) P: $A \to B$
(k) O:A
(k+1) P: B

به‌سادگی دیده می‌شود که این سمنتیک نامتعدی است. چراکه اگر دو بار شرط تو در تو داشته باشیم بازی متوقف خواهد شد. و در این وضع O برنده است.

نقدها به نظریه‌های عامیانه فراوانند. چنانکه پیش از این گفتیم، در اینجا قصد دفاع از نظریه‌های عامیانه را نداریم؛ بلکه قرار است از نظریه‌ی پیشنهادی در برابر سایر نظریه‌های عامیانه دفاع کنیم. ازاین‌رو باید تنها به این نقد پاسخ گوییم: آیا اشکال مرز دقیق برای این سمنتیک قابل بازسازی نیست؟ پاسخ خوشبختانه منفی است. در این سمنتیک تنها از مفهوم ادعا و سطوح آن استفاده شده است؛ مفاهیم دامنه‌ی تعبیر، ارضاء و ... نقشی ندارند. چنین ویژگی‌ای سبب می‌شود که نتوان اشکال مرز دقیق را برای این سمنتیک بازسازی کرد. به خاطر آوریم که اشکال مرز دقیق به واسطه‌ی وجود دامنه‌ی تعبیر و افراز آن توسط محمول‌ها پیش می‌آمد.

۳. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

مساله این مقاله مدلی برای سازگاری رواداری به‌همراه وجود موارد مثبت و منفی بود. برای این منظور اصلاح منطق کلاسیک ناگزیر می‌نماید. منطق جایگزین منطقی نامتعدی است. منطق نامتعدی نتیجه‌ای برای نظریه‌ی ادعا دارد: سطوح ادعا. استدلال شد که اگر نظریه‌ی عامیانه از سمنتیک بر پایه‌ی نظریه‌ی مدل بهره گیرد نمی‌تواند راه‌حل موفقی برای مساله‌ی رواداری داشته باشد. راه‌حل پیشنهادی سمنتیک بر پایه‌ی نظریه‌ی بازی است. در این سمنتیک تنها بر اساس مفهوم ادعا و تعهد به سطوح ادعا می‌توان مدلی سازگار برای رواداری ارائه کرد. اهمیت این سمنتیک این است که اشکال مرز دقیق برای آن قابل بازسازی نیست.

مراجع:

Brandom, R. (1983) Asserting, *Nous*, 17:637–640.

Brandom, R. (1984) *Making It Explicit*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

Brandom, R. (2008) *Between Saying and Doing: Towards an Analytic Pragmatism*. Oxford University Press, Oxford.

Cobreros, P., Egre, P., Ripley, D., & van Rooij, R. (2012) Tolerant, classical, strict, *Journal of Philosophical Logic*, 41, pp. 347-385.

Hintikka, J. (1973) *Logic, Language-Games and Information: Kantian Themes in the Philosophy of Logic*, Clarendon Press, Oxford.

Lorenzen, P. (1958) Logik und Agon, *Arti del XII Congresso Internationale de Filosofia*, Venezia, pp.

187–194.

Lorenzen, P. & Lorenz, K. (1978) *Dialogische Logik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Marion, M. (2009) Why Play Logical Games?, In *Games: Unifying Logic, Language, and Philosophy*, edited by O. Majer, A.-V. Pietarinen, and T. Tulenheimo, 3–26. Dordrecht: Springer.

Marion, M. (2010) Between Saying and Doing: From Lorenzen to Brandom and Back, In *Construction. Festschrift for Gerhard Heinzmann*, edited by P. E. Bour, M. Rebuschi, and L. Rollet, 489–97. London: College Publications.

Marion, M. (2012) Game Semantics and the Manifestation Thesis, in *The Realism-Antirealism Debate in the Age of Alternative Logics*, Rahman, S. & Primiero, G. & Marion, M. (eds.), Dordrecht: Springer.

Priest, G. (2010) Inclosures, Vagueness, and Self-reference, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 51, pp. 69–84.

Weber, Z. (2010) A Paraconsistent Model of Vagueness, *Mind*, 119, pp. 1025–45.

Zardini, E. (2008) A model of tolerance, *Studia Logica*, 90, 337–368.

Kripke Semantics for Fuzzy Logics

Parvin Safari & Saeed Salehi

September 14, 2016

Abstract

Kripke frames (and models) provide a suitable semantics for sub-classical logics; for example Intuitionistic Logic (of Brouwer and Heyting) axiomatizes the reflexive and transitive Kripke frames (with persistent satisfaction relations), and the Basic Logic (of Visser) axiomatizes transitive Kripke frames (with persistent satisfaction relations). Here, we investigate whether Kripke frames/models could provide a semantics for fuzzy logics. For each axiom of the Basic Fuzzy Logic, necessary and sufficient conditions are sought for Kripke frames/models which satisfy them. It turns out that the only fuzzy logics (logics containing the Basic Fuzzy Logic) which are sound and complete with respect to a class of Kripke frames/models are the extensions of the Gödel Logic (or the super-intuitionistic logic of Dummett); indeed this logic is sound and strongly complete with respect to reflexive, transitive and connected (linear) Kripke frames (with persistent satisfaction relations). This provides a semantic characterization for the Gödel Logic among (propositional) fuzzy logics. This logic can be aximatized as the Intuitionistic Logic plus the axiom $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$, and is sound and strongly complete with respect to reflexive, transitive, and connected Kripke frames (with persistent satisfaction relations). Gödel Fuzzy Logic is axiomatized as BL plus the axiom $\varphi \to (\varphi \& \varphi)$ of idempotence of conjunction. Dummett showed that this logic can be completely axiomatized by the axioms of intuitionistic logic plus the axiom $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$. We will show that the only class of Kripke models which could be sound and (strongly) complete for a logic containing BL must contain the

class of reflexive, transitive, connected and persistent Kripke models. In the other words, any logic that contains BL and is axiomatizing a class of Kripke frames/models must also contain the Gödel–Dummett Logic. So, a Kripke-Model-Theoretic characterization of Gödel Fuzzy Logic is that *it is the smallest fuzzy logic containing the Basic Fuzzy Logic which is sound and complete with respect to a class of Kripke frames/models.* Also, the class of reflexive, transitive, connected and persistent Kripke models is the smallest class that can be axiomatized by a propositional fuzzy logic.

Fixpoint modal logic and automata: a coalgebraic perspective

Fatemeh Seifan

November 27, 2016

From the perspective of modal logic, the fixpoint modal logic $\mu\mathtt{ML}$ is a well-behaved extension of the basic formalism, with a great number of attractive logical properties. This logic has proved to be an appealing language to reason about transition systems and found its way to areas including artificial intelligence, economics, linguistics and computer science.

The other central component of this talk is the concept of automaton. Logical languages are declarative and useful to specify properties of mathematical structures. Automata on the other hand, also express structural properties. They are devices operating on structures, such as transition systems, and exploring their properties step by step. They can actually be seen as an alternative way to think of formulas. Coalgebras then enter this picture in a natural way, since they uniformly generalize state base evolving systems.

Our goal in this talk is to study the interaction of these areas and review some of the existing results linking these concepts.

Gödel Incompleteness Theorems, Generalized and Optimized for Definable Theories

Payam Seraji *(joint work with S. Salehi†)

Usually, proofs of the Gödel's first incompleteness theorem are stated for recursively enumerable (r.e) theories, but it is known (and a kind of folklore) that this theorem also holds for definable theories (a theory T is called *definable* if the set of (Gödel numbers of) its axioms is definable by a formula $\varphi(x)$, i.e. i is (Gödel number of) an axiom of T, iff $\mathbb{N} \vDash \varphi(\bar{i})$), see e.g. [6] and [5]. Arguments presented in these references need the theory to be sound. We reduce this requirement to Σ_{n-1}-soundness:

Theorem 1. *If (the set of axioms of) a theory $T \supseteq \mathsf{Q}$ is definable by a Σ_n formula, then there is a Π_n sentence independent from T, provided that T is $\Sigma_{n-1}-$sound (which mean T dose not prove any false Σ_{n-1} sentence).*

We also show that this requirement is optimal in a sense, by constructing a Σ_{n-2}-sound and Σ_n-definable extention of Q which is complete. Another kind of consistency statements are the *n-consistency* statements, first introduced by G. Kreisel ([2]). It will be showed that similar incompleteness phenomenon holds for these statements:

Theorem 2. *For any $n \geq 1$, if $T \supseteq Q$ is a $(n-1)$-consistent theory such that the set of its axioms is Σ_n-definable, then there is a Π_n sentence not decidable in T.*

*University of Tabriz.

†University of Tabriz.

This result is optimal too and $(n-1)$-consistency can not be reduced to $(n-2)$-consistency. This theorem is a stronger form of a result of P. Hájek ([1], theorem 2.5). Unfortunately, the proof of this theorem is not constructive and our next theorem shows that it is not an accident, because it is impossible to present a constructive proof for it when $n > 3$:

Theorem 3. *There is no computable function f such that for any Σ_4-definable and 3-consistent theory $T_\psi \supseteq Q$, $f(\ulcorner\psi\urcorner)\downarrow$ and is a Π_4 sentence which is independent from T_ψ (ψ is the formula which defines the set of axioms of T).*

Our last results are about the generalizing of the second incompleteness theorem. the main result is the following:

Theorem 4. *For any Σ_n-definable and Σ_{n-1}-sound theory T extending $I\Delta_0 + Exp$, we have $T \nvdash \Sigma_{n-1}\text{-Sound}(T)$, where $\Sigma_{n-1}\text{-Sound}(T)$ is a sentence that expresses Σ_{n-1} soundness of T.*

We show optimality of this theorem by constructing a Σ_n-definable and Σ_{n-2}-sound theory $\mathcal{T}_n \supseteq PA$ such that $\mathcal{T}_n \vdash \Sigma_{n-2} - sound(\mathcal{T}_n)$ (for any $n \geq 2$).

References

[1] P. Hájek, *Experimental logics and Π_3 theories*, The journal of symbolic logic 42 (1977) pp. 515-522.

[2] D. Isaacson, *Necessary and sufficient conditions for undecidabillity of the Gödel sentence and its truth*, Peter Clark, David DeVidi, and Michael Hallett (eds), *Vintage Enthusiasms: Essays in Honour of John Bell*, University of Western Ontario Series in the Philosopy of Science, Springer Verlag, Heidelberg and New York, pages 135-152, 2011.

[3] G. Kriesel, *A refinement of ω-consistency* (Abstract), The journal of symbolic logic 22 (1957) pp. 108-109.

[4] S. Salehi and P. Seraj, *Gödel-Rosser incompleteness theorem, generalized and optimized for definable theories*, Oxford Journal of Logic and Computation, first published online: July 2016, doi: 10.1093/logcom/exw025.

[5] G. Serény, *Boolos-style proofs of limitative theorems*, Mathematical Logic Quarterly, volume 50, issue 2, pages 211-216, 2004. C. Smorynski, *The incompleteness theorems*, in J. Barwise(ed.), Handbook of mathematical logic, pp. 821-865, Amesterdam, North-Holland.

[6] R.M. Smullyan, *Gödels Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, Oxford 1992.

LOGICAL ASPECTS OF TOPOFRAMES

MOHAMMAD ZARGHANI [1], ALI AKBAR ESTAJI,
AND ABOLGHASEM KARIMI FEIZABADI

Abstract. In this paper, we prepare a general account of the role of topoframes as the Lindenbaum algebras of a certain type of propositional theories.

1. Introduction and background

Frames are complete lattices in which infinite joins distribute over finite meets. Just as Boolean logics can be seen as models for classical propositional logic, frames can be seen as models for geometric propositional logic, which is a logic with finite conjunctions and infinite disjunctions. In this paper we define a bi-system logic (L, Th) all of the elements belonging to Th have negations in L.

Before starting the main ideas, it will be helpful to make some preliminary observations.

Definition 1.1. ([2], [5]) A topoframe is a pair (L, τ), abbreviated L_τ; consisting of a frame $(L; \vee, \wedge, \perp, \top)$ and a subframe τ of L all of whose elements are complemented in L.

Definition 1.2. Let τ_i be a topoframe on a frame L_i, for every $i = 1, 2$. A frame homomorphism $f : L_1 \to L_2$ is called a (τ_1, τ_2)-*homomorphism* if $f(\tau_1) \subseteq \tau_2$.

[1] The following definition illuminate logical aspects of frames.

Definition 1.3. A propositional theory Th in this context is determined by the following ingredients.

(1) Its propositions are generated from a given set of basic propositions by binary conjunction $\wedge$ and disjunction $\vee$ of arbitrary sets of propositions, together with the distinguished propositions $\top$ ("true") and $\perp$ ("false").

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 06D22; Secondary 11U09.
Key words and phrases. Topoframe, Topo-propositional theory, Lindenbaum algebra, kernel and closure operator.

(2) The notion of entailment $\vdash$ between propositions is subject to the following rules, where $a, b, \ldots$ stand for arbitrary propositions and S for any set of propositions.
(i) $a \vdash a$.
(ii) If $a \vdash b$ and $b \vdash c$, then $a \vdash c$.
(iii) $\bigvee S \vdash a$ whenever $s \vdash a$ for all $s \in S$.
(iv) If $a \vdash b$ and $a \vdash c$, then $a \vdash b \wedge c$.
(v) $a \wedge b \vdash b$ and $a \wedge b \vdash b$.
(vi) $s \vdash \bigvee S$ for all $s \in S$.
(vii) $\perp \vdash \bigvee \emptyset$.
$(viii)$ $a \vdash \top$.
(ix) $a \wedge \bigvee S \vdash \bigvee\{a \wedge s \mid s \in S\}$.

Remark 1.4. We list a few simple consequences of the rules above, where "$\equiv$" expresses mutual entailment:
$a \wedge a \equiv a$, $a \wedge b \equiv b \wedge$, $a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c$, $\perp \vdash a$;
if $a \vdash c$ and $b \vdash d$, then $a \wedge b \vdash c \wedge d$;
$t \wedge \bigvee S \equiv t$ for all $t \in S$;
$a \wedge \bigvee S \equiv \bigvee\{a \wedge s \mid s \in S\}$.

Next, as for other logical systems, any propositional theory Th of this kind gives rise to its Lindenbaum algebra $\Lambda(Th)$ which consists of all propositions of Th modulo provable equivalence $a \equiv b$, with operations determined by the propositional operations $\wedge$, $\bigvee$, $\top$ and $\perp$.

2. topo-propositional theories

In this section we extend well-known results for topoframes to the setting of topo-propositional, the logical bi-structures of topology and define some arrows on them yielding a closure operator and a kernel operator.

The notion of negation $\neg$ for propositions has the following rule, where a, b stand for arbitrary propositions:
if $a \vee b \equiv \top$ and $a \wedge b \equiv \perp$, then $a \equiv \neg b$

Definition 2.1. Let (L, Th) be a topo-propositional theory and Th a subset of L being also a propositional theory. The pair (L, Th) is said to be a **topo-propositional theory**, if

(1) the members of Th have negations in L, and
(2) $\Lambda(Th)$ with the propositional operations $\wedge$, $\bigvee$, $\top$ and $\perp$ is a subframe of $\Lambda(L)$.

We can immediately conclude from Definition 2.1 that for any topo-propositional theory (L, Th), its Lindenbaum algebra $(\Lambda(L), \Lambda(Th))$ is a topoframe that its inequalities determined by its axioms.

Lemma 2.2. *In a propositional theory L, for any $a, b \in L$, the following statements are equivalent:*

(1) $a \wedge b \equiv a$;

(2) $a \vdash b$;

(3) $a \vee b \equiv b$.

Proof. (1⇒2) Let $a \wedge b \equiv a$. Then $a \vdash a \wedge b$; also by 1.3(v), $a \wedge b \vdash b$ and hence $a \vdash b$, by 1.3(ii).
(2⇒3) Let $a \vdash b$; furthermore, $b \vdash b$. So $a \vee b \vdash b$, by 1.3(iii); on the other hand, $b \vdash a \vee b$ by 1.3(vi) and hence $a \vee b \equiv b$, by definition.
(3⇒2) Let $a \vee b \equiv b$; so that $a \vee b \vdash b$, by definition; furthermore, $a \vdash a \vee b$ by 1.3(vi) and hence $a \vdash b$, by transitivity law.
(2⇒1) Let $a \vdash b$; furthermore, $a \vdash a$. So $a \vdash a \wedge b$, by 1.3(iv); on the other hand, $a \wedge b \vdash a$ by 1.3(v) and hence $a \wedge b \equiv a$, by definition. □

As an immediate consequence of the latter lemma, a topo-propositional theory (L, Th) satisfies
Unit rules: $a \vee \perp \equiv a$, $a \wedge \top \equiv a$,
for every $a \in L$.

Definition 2.3. In a propositional theory L, the **pseudo-negation** of an element $a \in L$ is defined by

$$a^* := \bigvee \{t \in L \mid t \wedge a \equiv \perp\},$$

Proposition 2.4. *Let L be a propositional theory. Then, for every $a, b, c \in L$ and $\{a_i\}_i \subseteq L$, the following statements hold.*

(1) *If $a \wedge b \equiv \perp$, then $a \vdash b^*$.*
(2) *If $a \vdash b$, then $b^* \vdash a^*$.*
(3) $a \vdash a^{**}$.
(4) $(a \vee b)^* \equiv a^* \wedge b^*$.
(5) *If $a \in L$ has a negation, then $a^* \equiv \neg a$.*
(6) $a \wedge (a \vee b) \equiv a$ *and* $a \vee (a \wedge b) \equiv a$.
(7) $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

In a topo-propositional theory, infinitary infima in its Lindenbaum algebra is not the same as conjunction unless we add this condition to the assumptions. For instance, see part (5) of the following proposition.

Proposition 2.5. *Let (L, Th) be a topo-propositional theory. Then, for $a, b \in Th$ and $\{a_i\}_i \subseteq L$, the following statements hold.*

(1) $\neg\neg a \equiv a$.
(2) $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$.
(3) $\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$.

(4) *If* $a \vdash b$*, then* $\neg b \vdash \neg a$*.*
(5) *If for every* $S \subseteq \neg Th$ *the conjunction* $\bigwedge S$ *belongs to* $\neg Th$ *and* $\bigwedge S \vdash s$ *for all* $s \in S$*, then*

$$\neg(\bigvee_{i\in I} a_i) \equiv \bigwedge_{i\in I} \neg a_i \quad \textit{and} \ \neg a \vee \bigwedge_{i\in I} \neg a_i \equiv \bigwedge_{i\in I} (\neg a \vee \neg a_i)\,.$$

Proof. (1) This is obvious, by definition.

(2) By distributivity, associativity and unit laws in L, we have

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) &\equiv a \wedge ((b \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg b))\\ &\equiv a \wedge ((b \wedge \neg a) \vee \bot)\\ &\equiv a \wedge (b \wedge \neg a)\\ &\equiv \bot\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) &\equiv ((a \vee \neg a) \wedge (b \vee \neg a)) \vee \neg b\\ &\equiv (\top \wedge (b \vee \neg a)) \vee \neg b\\ &\equiv (b \vee \neg a) \vee \neg b\\ &\equiv \top.\end{aligned}$$

Hence $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$.

(3) Since every $a \in Th$ has a negation in L, by part (5) of Proposition 2.4, we have $a^* \equiv \neg a$ and so this a particular case of part (4) of Proposition 2.4.

(4) This a particular case of part (2) of Proposition 2.4.

(5) Since $a_i \vdash \bigvee_{i\in I} a_i$, by part (2), $\neg(\bigvee_{i\in I} a_i) \vdash \neg a_i$, for every i. Now, let $c \in L$ with $c \vdash \neg a_i$. Then for every $i \in I$, $a_i \vdash c^*$. It follows that $\bigvee_{i\in I} a_i \vdash c^*$. So $c \vdash c^{**} \vdash \neg(\bigvee_{i\in I} a_i)$. In particular, for $c := \bigwedge_{i\in I} \neg a_i$, we have $c \vdash \neg(\bigvee_{i\in I} a_i)$, and hence $\neg(\bigvee_{i\in I} a_i) \equiv \bigwedge_{i\in I} \neg a_i$. The second assertion follows from part (2) and the first assertion.

□

Definition 2.6. In a topo-propositional theory (L, Th), the binary relation $\rightarrow$ on $L \times L$ is defined by

$$(a \rightarrow b) := \bigvee \{t \in Th \mid t \wedge a \vdash b\}\,,$$

and if for every $S \subseteq \neg Th$, $\bigwedge S \vdash s$ for all $s \in S$, then the binary relation $\smallsetminus$ is defined by

$$(a \smallsetminus b) := \bigwedge \{\neg q \mid q \in Th, b \vdash a \vee q\}\,.$$

The arrows mentioned above yield the following notions.
whenever for any $S \subseteq \neg Th$ the conjunction $\bigwedge S$ belongs to $\neg Th$ and $\bigwedge S \vdash$

s for all $s \in S$, the **closure** of p in $L$is the element

$$\Diamond p := (\bot \setminus p) \equiv \bigwedge \{s \in \neg Th \mid p \vdash s\},$$

where $\neg Th := \{\neg Th \mid t \in Th\}$, and the **interior** of any $p \in L$ is the element

$$\Box p := (\top \to p) \equiv \bigvee \{t \in Th \mid \ t \vdash p\}.$$

The properties of interior and closure are summarized in the following proposition. It says that $\Box$ on L is a kernel operator and $\Diamond$ on L is a closure operator.

Proposition 2.7. *Let (L, Th) be a topo-propositional theory. Then the operation $\Box$ from L to L satisfies the following properties.*

(K1) $\Box\top \equiv \top$, $\Box\bot \equiv \bot$.
(K2) $\Box p \vdash p$.
(K3) *If $a \in Th$, then $a \equiv \Box a$, and $\Box p \equiv \Box\Box p$.*
(K4) $\Box(p \wedge q) \equiv \Box p \wedge \Box q$,

for all $p, q \in L$. Also, whenever for any $S \subseteq \neg Th$ the conjunction $\bigwedge S$ belongs to $\neg Th$ and $\bigwedge S \vdash s$ for all $s \in S$, the operation $\Diamond$ from L to L satisfies the following properties:

(C1) $\Diamond\bot \equiv \bot$, $\Diamond\bot \equiv \bot$.
(C2) $p \vdash \Diamond p$.
(C3) $\Diamond\Diamond p \equiv \Diamond p$.
(C4) $\Diamond(p \vee q) \equiv \Diamond p \vee \Diamond q$,

for all $p, q \in L$.

Proof. (K1) By statement (*viii*) of Definition 1.3, we have $\Box\top \vdash \top$. On the other hand,

$$\begin{array}{rcll} \top & \vdash & \bigvee Th & \text{by statement } (vi) \text{ of Definition 1.3} \\ & = & \bigvee \{t \in Th \mid \ t \vdash \top\} & \\ & = & \Box\top. & \end{array}$$

So $\Box\top \equiv \top$. The other assertion is easy to verify.

(K2) Let $S := \{t \in Th \mid \ t \vdash p\}$. Then $\Box p \equiv \bigvee S \vdash p$, by statement (*vi*) of Definition 1.3.

(K3) For $a \in Th$, let $S := \{t \in Th \mid t \vdash a\}$. Then, by statement (*vi*) of Definition 1.3, $a \vdash \bigvee S = \Box a$, since a belongs to S. Furthermore, by assertion (K2), $\Box a \vdash a$, and hence $a \equiv \Box a$. The second assertion follows from the fact that $\Box p$ belongs to S.

(K4) By assertion (K2), $\Box p \wedge \Box q \vdash p \wedge q$ and hence $\Box(\Box p \wedge \Box q) \vdash \Box(p \wedge q)$. But $\Box(\Box p \wedge \Box q) \equiv \Box p \wedge \Box q$, since $\Box p \wedge \Box q$, by definition, belongs to Th, and so $\Box p \wedge \Box q \vdash \Box(p \wedge q)$. On the other hand, $\Box(p \wedge q) \vdash \Box p$ and $\Box(p \wedge q) \vdash$

$\Box p$ imply $\Box(p \wedge q) \vdash \Box p \wedge \Box q$, by statement (*iv*) of Definition 1.3. Thus $\Box(p \wedge q) \equiv \Box p \wedge \Box q$, as desired.

The assertion (C1–C4) follows by duality. $\Box$

We close with a comment on the equivalence of topo-propositional theories. Any map of the set of basic propositions of a theory (L_1, Th_1) into the class of propositions of a theory (L_2, Th_2) evidently extends to a map of all propositions of (L_1, Th_1) to propositions of (L_2, Th_2), and if this extension takes the axioms of the former to provable entailments of the latter we have an interpretation of (L_1, Th_1) in (L_2, Th_2), which amounts to a model of (L_1, Th_1) in $(\Lambda(L_2), \Lambda(Th_2))$, or alternatively a topoframe homomorphism $(\Lambda(L_1), \Lambda(Th_1)) \longrightarrow (\Lambda(L_2), \Lambda(Th_2))$. Clearly, this suggests an obvious notion of equivalence: (L_1, Th_1) is called equivalent to (L_2, Th_2) if the resulting $(\Lambda(L_1), \Lambda(Th_1)) \longrightarrow (\Lambda(L_2), \Lambda(Th_2))$ is an isomorphism. In particular, this situation may arise in the special form where one has a one-one onto map between the basic propositions of (L_1, Th_1) and (L_2, Th_2) providing an interpretation of either in the other.

References

[1] B. Banaschewski, The real numbers in pointfree topology, Textos de Mathemática (Series B), Vol. 12, University of Coimbra, 1997.

[2] A. A. Estaji, A. Karimi Feizabadi and M. Zarghani, Rings of real-continuous functions on a topolattice, Categories and General Algebraic Structures with Applications, Volume 4, Number 1, February 2016, 75-94.

[3] J. Picado, A. Pultr, 'Frames and Locales: Topology without points', Frontiers in Mathematics, vol. 28, Springer Basel, 2012.

[4] P.T. Johnstone, Stone Spaces. Cambridge University Press, Cambridge 1982.

[5] M. Zarghani, A.A. Estaji, and A. Karimi Feizabadi, Modified pointfree topology, Preprint.

(Mohammad Zarghani) Faculty of Mathematics and Computer Sciences, Hakim Sabzevari University, P.O. Box 397, Sabzevar, Iran.[1]

E-mail address: `zarghanimohammad@gmail.com`

(Ali Akbar Estaji) Faculty of Mathematics and Computer Sciences, Hakim Sabzevari University, P.O. Box 397, Sabzevar, Iran.

E-mail address: `aaestaji@hsu.ac.ir`

(Abolghasem Karimi Feizabad) Department of Mathematics, Gorgan Branch, Islamic Azad University, Gorgan, Iran.

E-mail address: `akarimi@gorganiau.ac.ir`

[1]Speaker

بررسی دو صورت بندی از دو جانبه گرایی

سلمان پناهی

دانشگاه ملبورن

دوجانبه گرایی[1] درمقابل یک جانبه گرایی[2] دیدگاهیست که برای تعیین معنای عبارات منطقی بر دو کنش زبانی اظهار[3] و انکار[4] تاکید می کند و صرف شرایط اظهار را برای تعیین معنای این عبارت ها کافی نمیداند. در دیدگاه یک جانبه گرایانه، برای تثبیت معنای عبارت های منطقی تنها به تعیین شرایط اظهار و آنچه از اظهار یک عبارت (با ادات منطقی مد نظر به عنوان عبارت اصلی) می توان نتیجه گرفت احتیاج است. حال آنکه در دیدگاه دوجانبه گرایانه دانستن شرایط انکار و آنچه از انکار یک عبارت می توان نتیجه گرفت نیز برای فهم معنای عبارت های منطقی لازم است.

هر دو دیدگاه به دسته رویکردهای «معنا به مثابه استفاده» تعلق دارند. دلیل اصلی اتخاذ دوجانبه گرایی معنایی باور به بنیادین تر بودن کنش زبانی انکار نسبت به نفی منطقی است. نخستین صورت بندی از دوجانبه گرایی توسط ایان رامفیت صورت گرفته[5] و دومین دیدگاه دراین مورد توسط گرِگ رستال ارایه شده است[6]. صورت بندی رامفیت با افزودن دو نماد مثبت و منفی به دستگاه معمول استنتاج طبیعی[7] برای منطق کلاسیک گزاره ها برای نشان دادن اظهار و انکار شکل گرفته و دیدگاه رستال تفسیری است از حساب رشته ها[8] برای منطق کلاسیک گزاره ها بدون افزودن نمادی برای اظهار و انکار. در مقاله پیش رو نخست با نگاهی به خصوصیات صوری هر یک از این دونظریه خواهیم دید که هر دو در تصویر نمودن وجوه مختلف دوجانبه گرایی یکسان عمل می کنند. برای این منظور ما به ازاء هر قاعده استنتاج از یکی را در صورت بندی دیگری بازسازی خواهیم نمود.

اجازه بدهید نگاهی دقیق تر بیاندازیم، در صوری سازی رامفیت از دو علامت "+" و "-" به ترتیب جهت نشان دادن اظهار یا تعهد مثبت و انکار یا تعهد منفی استفاده می شود. به این ترتیب که A+ به معنای اظهار A و A- به معنای انکار A می باشد و A می تواند یک فرمول اتمی در زبان منطق گزاره ها (مانند **p**) یا مولکولی (مانند q&p) باشد. منتهی این دو علامت، برخلاف نفی منطقی، نمی توانند به صورت مکرر ظاهر شوند. یعنی A++ یک فرمول خوش ساخت نیست. هدف رامفیت از افزودن این دو نماد به زبان معمول منطق گزاره ها ارایه قواعد استنتاجی ای است که معنای عبارت های منطقی را به طور کامل معیین کنند. همانطور که می دانیم در دستگاه های معمول استنتاج طبیعی برای منطق گزاره ها جهت تعیین معنای ادات منطقی # از دو قاعده معرفی و حذف برای ادات منطقی مربوطه استفاده می شود. رامفیت معتقد است که برای اینکه معنای یک ادات منطقی به طور کامل بیان شود باید دو قاعده برای معرفی و دو قاعده برای حذف داشت. به عنوان مثال، وی قواعد زیر را برای "و" پیشنهاد می کند:

---

[1] -Bilateralism
[2] -Unilateralism
[3]- Assertion
[4] -Denial
[5] - (Rumfitt, 2000)
[6]-(Restall, 2005)
[7] -Natural Deduction
[8] -Sequent Calculus

$$+\wedge I: \frac{+A \quad +B}{+(A \wedge B)} \qquad +\wedge E: \frac{+(A \wedge B)}{+A} \quad \frac{+(A \wedge B)}{+B}$$

$$-\wedge I: \frac{-A}{-(A \wedge B)} \quad \frac{-B}{-(A \wedge B)} \qquad -\wedge E \frac{-(A \wedge B) \quad \begin{matrix}[-A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[-B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}$$

همان طور که مشاهده می شود، قواعد رامفیت شامل معرفی و حذف اظهار عبارات ها با اتصال منطقی "و" به عنوان عبارت اصلی و انکار آنها هستند.

نظریه رستال در مورد کنش های زبانی اظهار و انکار، بر تعبیری به خصوص ازحساب رشته ها استوار است. در این دیدگاه اگرB نتیجه منطقی A باشد (که به صورت A⊢B نمایش داده می شود) آنگاه اظهار A و انکار B به طور همزمان موضعی "خارج از محدوده"[9] است. حال اگر با این تعبیر قواعد مربوط به حساب رشته ها را در نظر بگیریم، برای مثال، قواعد مربوط به "و" چنین فهم می شوند:

$$LI \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad RI \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Sigma \vdash B, \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash A \wedge B, \Delta, \Pi}$$

در مورد قاعده معرفی در طرف چپ رابطه منطقی می توان چنین گفت: اگر قاعده را از بالا به پایین بخوانیم می شود گفت که اگراظهار A (B) در کنار تعدادی دیگر از عبارت ها (Γ)و انکار تعدادی دیگر از عبارت ها (Δ) خارج از محدوده باشد آنگاه اظهار A&B در کنار Γ و انکار Δ کماکان خارج از محدوده است. اگر قاعده را از پایین به بالا بخوانیم می شود گفت که اگر اظهار A&B در کنار Γ و انکار Δ داخل محدوده باشد آنگاه اظهار A (B) در کنارΓ و انکار Δ کماکان داخل محدوده خواهد بود.

و در مورد قاعده معرفی در سمت راست: از بالا به پایین چنین خوانده می شود که اگر انکار A یا Δ و اظهار Γ خارج از محدوده باشد و همین طور انکار B یا Π و اظهار Σ خارج از محدوده باشد آنگاه انکارA&B یا Δ یا Π و اظهار Σ در کنار Γ خارج از محدوده خواهد بود. و از پایین به بالا چنین خوانده میشود که اگر انکارA&B یا Δ یا Π و اظهار Σ در کنار Γ داخل محدوده باشد آنگاه انکار A یا Δ و اظهار Γ و همچنین انکار B یا Π و اظهار Σ داخل محدوده خواهد بود.

حال که مختصری با هر دو دیدگاه آشنا شدیم می توان به نکته محل بحث اشاره کرد، در قواعدی که رامفیت برای تعیین معنای عبارت های منطقی معرفی می کند ارتباط میان اظهار(انکار) پذیری و نتیجه منطقی[10] چندان مشخص نیست. به عنوان مثال در قاعده حذف انکار "و" محتوای اظهاری (انکاری) نتیجه (C) معلوم نیست. مورد مشخص تر قواعد مربوط به انکار شرطی هستند. قواعد شرطی ها از این قراراند:

[9] - Out of bound
[10]-Consequence relation

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{+A} \quad \vdots \quad +B}{+(A \rightarrow B)} +\!\rightarrow I \qquad \dfrac{+(A \rightarrow B) \quad +A}{+B} +\!\rightarrow E$$

$$\dfrac{+A \quad -B}{-(A \rightarrow B)} -\!\rightarrow I \qquad \dfrac{-(A \rightarrow B)}{+A} \quad \dfrac{-(A \rightarrow B)}{-B} -\!\rightarrow E$$

همان طور که مشاهده می شود، در قواعد حذف انکار شرطی نمی توان گفت که رابطه منطقی حافظ انکار پذیری است.البته می توان پاسخ داد که در قواعد پیشنهادی رامفیت هدف تعیین معنای عبارت های منطقی بوده و این واقعیت که معنای به دست داده شده توسط این قواعد تقارن معنا داری با رابطه منطقی ندارند ضعفی برای آن محسوب نمی شود.

از سوی دیگر،چنان که دیدیم تفسیر رستال مبتنی بر رابطه نتیجه منطقی است. یعنی آنچه در سمت راست رابطه نتیجه منطقی قرار دارد انکار می شود و آنچه در سمت چپ رابطه منطقی قراردارد اظهار می شود. این رابطه منطقی است که انکار پذیری و اظهار پذیری را از هم جدا می کند. در صورت بندی رامفیت این کار بر عهده "اصول هماهنگی"[11] است. رامفیت معتقد است همان گونه که ما در منطق کلاسیک گزاره ها برای تعیین معنای رابطه منطقی قواعد ساختاری[12] داریم وبرای تعیین معنای ادات منطقی قواعد کار کردی[13] داریم، برای تنظیم اظهار پذیری و انکار پذیری هم، که علایم آن را به دستگاه منطقی خود افزوده ایم، نیازمند اصول هماهنگی هستیم. این اصول عبارت اند از:

$$C1: if\ \Gamma, \alpha \vdash \perp\ then\ \Gamma \vdash \alpha *$$

$$C2: \alpha, \alpha * \vdash \perp$$

در اینجا α فرمول نشانه گذاری شده با + یا- است و α* هم اشاره به وارونه شدن نشانه دارد.

می توان گفت که رویکرد رستال ساده تر از رویکرد رامفیت است، رابطه مشخصی با اظهار و انکار پذیری دارد و به همین جهت نیاز مند معرفی نماد جدید و اصول هماهنگی نیست. حال برای اینکه بتوان فهمید که آیا نکته ای در مورد اظهار و انکار هست که قواعد پیشنهادی رامفیت آنها را باز نماید ولی در تعبیر رستال غائب باشد باید مابه ازای قواعد رامفیت را در حساب رشته ها باز سازی نمود. راهنمای ما در این راه آن است که آنچه در صورت بندی رامفیت علامت منفی دارد در حساب رشته ها باید در طرف راست رابطه منطقی ظاهر شود و آنچه علامت مثبت دارد باید در طرف چپ رابطه منطقی قرار گیرد. همین طور برای بازسازی قواعد حساب رشته ها در صورت بندی رامفیت آنچه در طرف راست رابطه منطقی است علامت منفی و آنچه در طرف چپ این رابطه است علامت مثبت می گیرد.

[11] -Co-ordination Principles
[12]-Structural rules
[13] -Operational rules

مطابق این شیوه، برای باز سازی قواعد رامفیت در حساب رشته ها، برای هر ادات منطقی به چهار قاعده معرفی و حذف راست و چپ نیاز است. به عنوان مثال قواعد پیشنهادی برای شرطی چنین اند:

$$LI\,\frac{\Gamma\vdash A,\Delta \quad \Sigma,B\vdash\Pi}{\Gamma,A\to B,\Sigma\vdash\Delta,\Pi} \qquad RI\,\frac{\Gamma,A\vdash B,\Delta}{\Gamma\vdash A\to B,\Delta}$$

$$LE\,\frac{\Gamma,A\to B\vdash\Delta}{\Gamma\vdash A,\Delta \quad \Gamma,B\vdash\Delta} \qquad RE\,\frac{\Gamma\vdash A\to B,\Delta}{\Gamma,A\vdash B,\Delta}$$

آنچه می ماند مقایسه قواعد، به تفصیل، با یکدیگر و تفسیر تفاوت هاست. به عنوان مثال قاعده معرفی در سمت چپ نتیجه منطقی که ما به ازاء معرفی اظهار شرطی است A را در بالای خط نتیجه در سمت راست دارد که در واقع متفاوت قاعده رامفیت است که در آن A اظهار می شود. یا اینکه در اکثر موارد قواعد مربوط به حذف در حساب رشته ها همان قواعد معرفی هستند که از پایین به بالا نوشته شده اند.

پس از کنار هم قرار دادن این قواعد می توان به این جمع بندی رسید که نکته ای در صورت بندی رامفیت وجود ندارد که در خوانش رستال از حساب رشته ها مفقود باشد. پرسش فلسفی ای که در خلال مطلب سعی در پرداختن به آن خواهد شد این است که آیا اساسا مزیتی در تقارن میان اظهار و انکار و نتیجه منطقی هست یا نه. البته مطلب حاضر در حال نهایی شدن است و اگر در خلال تدقیق بر روی قواعد تغییری در قضاوت در مورد این دو صوری سازی تغییری حاصل شد نتیجه گیری ذکر شده در بالا تغییر می کند.

Restall, G. (2005). Multiple Conclusions. In L. V.-V. a. D. W. Petr Hajek (Ed.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the Twelfth International Congress* (pp. 189–205): Kings' College Publications.

Rumfitt, I. (2000). "Yes" and "No". *Mind, 109*(436), 42.

شعر و ریاضیات

ضیاء موحد

ریاضیات و منطق ریاضی موضوع‌هایی هستند متفاوت با شعر؛ اما در ضمن تفاوت‌ها، مشترکات متعدد و چشم‌گیری دارند. پل والری (۱۸۷۱-۱۹۴۵)، که آخرین شاعر مهم سمبولیست فرانسه، متفکری جامع الاطراف و مرتبط با دانشمندان علوم مانند هانری پوانکاره است، جایی گفته است: «اگر منطق‌دان نتواند جز منطق‌دان باشد نه منطق‌دان می‌شود و نه می‌تواند بشود، و اگر شاعر جز شاعر نباشد، بی کم‌ترین توانایی در اندیشهٔ انتزاعی، هیچ اثر شاعرانه‌ای از خود به جا نخواهد گذاشت». مشترکات زبان منطق و ریاضی با زبان شعر موضوعی است که در این نوشته می‌خواهم بر آنها انگشت بگذرام و بر این گفتهٔ پل والری پرتوی بیفکنم.